Способы вычисления неопределённых инт-лов

Способ подстановки

$\int f(u)\,du = F(u) + C$. $\quad u = \varphi(x)$ – дифф. ф-я.

$f(\varphi(x))$ опред. при $x \in X$ – промежуток

$F(\varphi(x))$, $x \in X$. $\quad F'_x(\varphi(x)) = F'_u(u)\Big|_{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'_x(x) =$

$= f(u)\Big|_{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \Rightarrow$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C, \text{ т.е.}$$

$$\int f(\varphi(x))\underbrace{\varphi'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du\Big|_{u=\varphi(x)}$$

Наоборот, $\displaystyle \int f(x)\,dx \underset{x=\psi(t)}{=} \int f(\psi(t))\psi'(t)\,dt\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$

Нужно, чтобы $\exists\, \psi^{-1}$. Достаточно, чтобы

$\psi(t)$ строго монотонна ($\psi'(t)$ сохраняет знак)

Способ подстановки. Примеры.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du \Big|_{u=\varphi(x)} \qquad \int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)\,dt \Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$$

1. $$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$$

$u = x^2+a^2$, $du = 2x\,dx$

Способ подстановки. Примеры.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du \Big|_{u=\varphi(x)} \qquad \int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)\,dt \Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$$

1. $$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$$

$u = x^2+a^2$, $du = 2x\,dx$

2. $$\int \sin^3 x\,dx = -\int \sin^2 x(-\sin x)\,dx = -\int (1-t^2)\,dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$t = \cos x$, $dt = -\sin x\,dx$

Способ подстановки. Примеры.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du\Big|_{u=\varphi(x)} \qquad \int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)\,dt\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$$

1. $$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$$

$u = x^2+a^2$, $du = 2x\,dx$

2. $$\int \sin^3 x\,dx = -\int \sin^2 x(-\sin x)\,dx = -\int(1-t^2)\,dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$t = \cos x$, $dt = -\sin x\cdot dx$

3. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})} = \int\frac{6t^5\,dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = 6\left[\int dt - \int\frac{dt}{t^2+1}\right] =$$

$x = t^6$, $dx = 6t^5\,dt$

$$= 6(t - \operatorname{arctg} t) + C = 6\left(\sqrt[6]{x} - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right) + C$$

Способ подстановки. Примеры.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du \Big|_{u=\varphi(x)} \qquad \int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)\,dt \Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$$

1. $$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$$
$u = x^2+a^2$, $du = 2x\,dx$

2. $$\int \sin^3 x\,dx = -\int \sin^2 x(-\sin x)\,dx = -\int(1-t^2)\,dt = -t+\frac{t^3}{3}+C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}+C$$
$t = \cos x$, $dt = -\sin x\cdot dx$

3. $$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})} = \int\frac{6t^5\,dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = 6\left[\int dt - \int\frac{dt}{t^2+1}\right] =$$
$x = t^6$, $dx = 6t^5\,dt$
$$= 6(t - \mathrm{arctg}\,t) + C = 6\left(\sqrt[6]{x} - \mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}\right) + C$$

4. $$\int \mathrm{ctg}\,x\,dx = \int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int\frac{du}{u} = \ln|u|+C = \ln|\sin x| + C$$
$u = \sin x$, $du = \cos x\,dx$

Способы вычисления неопределённых инт-лов

Способ подстановки

$\int f(u)\,du = F(u) + C$. $\quad u = \varphi(x)$ – дифф. ф-я.

$f(\varphi(x))$ опред. при $x \in X$ – промежуток

$F(\varphi(x))$, $x \in X$. $F'_x(\varphi(x)) = F'_u(u)\Big|_{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'_x(x) =$

$= f(u)\Big|_{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \Rightarrow$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C, \text{ т.е.}$$

$$\int f(\varphi(x))\underbrace{\varphi'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du\Big|_{u=\varphi(x)}$$

Наоборот, $\quad \int f(x)\,dx \underset{x=\psi(t)}{=} \int f(\psi(t))\psi'(t)\,dt\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$

Нужно, чтобы $\exists\, \psi^{-1}$. Достаточно, чтобы $\psi(t)$ строго монотонна ($\psi'(t)$ сохраняет знак)

Интегрирование по частям

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

$$\Rightarrow \int u\,dv = \underbrace{\int d(uv)}_{uv + C} - \int v\,du$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Интегрирование по частям. Примеры

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

1. $\int \ln x \cdot dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$

$\ln x = u \qquad dx = dv$

$du = \frac{dx}{x} \qquad v = x$

Интегрирование по частям. Примеры

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

1. $\int \ln x \cdot dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$

$\ln x = u \quad dx = dv$

$du = \frac{dx}{x} \quad v = x$

2. $I = \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx =$

$= e^x \sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int \cos x \cdot e^x dx}_{I}$

$\Rightarrow \int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$

Интегрирование по частям. Примеры

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

1. $\int \ln x \cdot dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - x + C$

$\ln x = u \qquad dx = dv$

$du = \frac{dx}{x} \qquad v = x$

2. $I = \int \underbrace{e^x}_{u}\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx =$

$= e^x \sin x + \int e^x d(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int \cos x \cdot e^x dx}_{I}$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$$

3. $I = \int \underbrace{\sqrt{x^2+a^2}}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int x \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx =$

$a>0$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$

$$\int \sqrt{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right] + C$$

Способы вычисления неопределённых инт-лов

Способ подстановки

$\int f(u)\,du = F(u) + C$. $u = \varphi(x)$ – дифф. ф-я.

$f(\varphi(x))$ опред. при $x \in X$ – промежуток

$F(\varphi(x))$, $x \in X$. $F'_x(\varphi(x)) = F'_u(u)\Big|_{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'_x(x) =$

$= f(u)\Big|_{u=\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \Rightarrow$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C, \text{ т.е.}$$

$$\int f(\varphi(x))\underbrace{\varphi'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du\Big|_{u=\varphi(x)}$$

Наоборот, $\int f(x)\,dx \underset{x=\psi(t)}{=} \int f(\psi(t))\psi'(t)\,dt\Big|_{t=\psi^{-1}(x)}$

Нужно, чтобы $\exists\, \psi^{-1}$. Достаточно, чтобы $\psi(t)$ строго монотонна ($\psi'(t)$ сохраняет знак)

Задание. Получить формулу для

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$(a>0,\ b^2-4ac<0)$

Интегрирование по частям

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

$$\Rightarrow \int u\,dv = \underbrace{\int d(uv)}_{uv+C} - \int v\,du$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n},\quad n = 1, 2, \ldots \quad a>0$$

$$J_n = \int \underbrace{\frac{1}{(x^2+a^2)^n}}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x \cdot \frac{(-n)\cdot 2x\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\,dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2J_{n+1} \Rightarrow$$

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n\right]$$

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

$$J_3 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2+a^2)} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

. . . .

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} =$$

$$\frac{x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A^{\;x^2+5x+6}}{x+1} + \frac{B^{\;x^2+4x+3}}{x+2} + \frac{C^{\;x^2+3x+2}}{x+3}$$

$2:\ A+B+C=1 \qquad A=\frac{1}{2}$

$1:\ 5A+4B+3C=0 \qquad B=-4$

$0:\ 6A+3B+2C=0 \qquad C=\frac{9}{2}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-4\int\frac{dx}{x+2}+\frac{9}{2}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{1}{2}\ln|x+1|-4\ln|x+2|+\frac{9}{2}\ln|x+3|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)(x+3)^9}{(x+2)^8}\right|+C$$