Формирование обобщенных многокритериальных оценок

Проблема многофакторного оценивания

Универсальный подход к решению задачи многокритериальной оптимизации

– проблема многофакторного оценивания –

построение обобщенной оценки решений $x \in X$

Формирование обобщенных многокритериальных оценок

Для формирования обобщенных многокритериальных скалярных оценок используется *теория полезности*, основанная на гипотезе Неймана[1] и Моргенштерна[2]

[1] Нейман (Neumann) Джон (Янош) фон (1903 – 1957), американский математик, член Национальной АН США (1937). Основные научные работы посвящены функциональному анализу и его приложениям к вопросам классической и квантовой механики.
[1] Моргенштерн (Morgenstern) Оскар (1902– 1978), американский экономист. Получил известность как создатель (совместно с Дж. фон Нейманом) теории игр. Применил теорию игр к анализу рыночной экономики (теория ожидаемой полезности).

Формирование обобщенных многокритериальных оценок

Гипотеза. Каждая локальная характеристика решения (оцениваемая *частными критериями*) имеет для ЛПР некоторую ценность (*полезность*), которая может быть измерена количественно и поэтому существует обобщенная количественная оценка предпочтительности решения

$$x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow P(x_1) > P(x_2),\ \ \forall x_1,\ x_2 \in X,$$

где $P(x)$ – количественная оценка обобщенной полезности решения

Формирование обобщенных многокритериальных оценок

Обобщенная полезность любого решения $x \in X$ определяется значениями частных критериев $k_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, которые имеют различную природу, различные единицы и интервалы измерения.

Измерение и шкалирование частных критериев

Под измерением частных критериев понимается сравнение измеряемой характеристики с некоторым эталоном. Система эталонов или эталонных значений образует *измерительную шкалу*.

Все шкалы можно разделить на два класса:

- *качественные и количественные*

Качественные шкалы

- *Качественные шкалы:*

шкала классов *(номинальная*) и порядковая шкала (*ранговая*)

Качественные шкалы. Номинальная шкала

- Шкала классов *(номинальная)*

В *номинальной шкале* в качестве эталонов выступают некоторые *классы*, каждому из которых присвоено уникальное *имя*.

Номинальная шкала позволяет только *классифицировать* множество альтернатив X на подгруппы с одинаковыми значениями (*именами*) измеряемого признака (частного критерия), не задавая на них отношение предпочтения (*доминирования*).

Качественные шкалы. Ранговая шкала

- Ранговая шкала *(порядковая)*

Шкала с естественным *упорядочением* по степени проявления измеряемого признака, задающая отношение качественного порядка

Качественные шкалы. Ранговая шкала

- Ранговая шкала *(порядковая)*

Направленные и ненаправленные шкалы

Направленные шкалы порядка: переход из состояния в состояние возможен только в одном направлении

Ненаправленные шкалы порядка: возможен переход в любое состояние

Количественные шкалы

- *Количественные шкалы*

Основаны на построении отображений множества решений X на множество вещественных чисел, $k(x): X \to R^1$, позволяющих определить количественное значение предпочтения

Количественные шкалы

- *Количественные* шкалы

– *интервальная* шкала: $\varphi(k(x)) = ak(x) + b, \quad a > 0, \forall b$

– шкала *подобия*: $\varphi(k(x)) = ak(x), \ a > 0$

– *абсолютная* шкала: $\varphi(k(x)) = k(x)$

Задача нормализации частных критериев

Задача приведения всех критериев к единой *размерности* и *шкале* измерения – это задача *нормализации* частных критериев $k_i(x),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$

Задача *нормализации* частных критериев $k_i(x),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ – построение функций *локальной* полезности $p_i\left(x\right),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$

Функция локальной полезности

Функция локальной полезности $p_i(x)$ *частных критериев* $k_i(x)$,

$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ удовлетворяет следующим требованиям:

1) $p_i(x) \in [0,\ 1]\ \forall x \in X$
2) $p_i(x)$ инвариантна к размерности частного критерия $k_i(x)$
3) $p_i(x)$ инвариантна к виду экстремума частного критерия $k_i(x)$

Функция локальной полезности

$$p_i(x) = \left(\frac{k_i(x) - k_i^-}{k_i^+ - k_i^-} \right)^{\alpha_i}$$

$$k_i^+ = \begin{cases} \max\limits_{x \in X} k_i(x), & \text{если } k_i(x) \to \max \\ \min\limits_{x \in X} k_i(x), & \text{если } k_i(x) \to \min \end{cases}$$

$$k_i^- = \begin{cases} \min\limits_{x \in X} k_i(x), & \text{если } k_i(x) \to \max \\ \max\limits_{x \in X} k_i(x), & \text{если } k_i(x) \to \min \end{cases}$$

Функция локальной полезности

α_i – определяет вид зависимости:

$p_i(x)$ – вогнутая функция при $0 < \alpha_i < 1$

$p_i(x)$ – линейная функция при $\alpha_i = 1$

$p_i(x)$– выпуклая функция при $\alpha_i > 1$

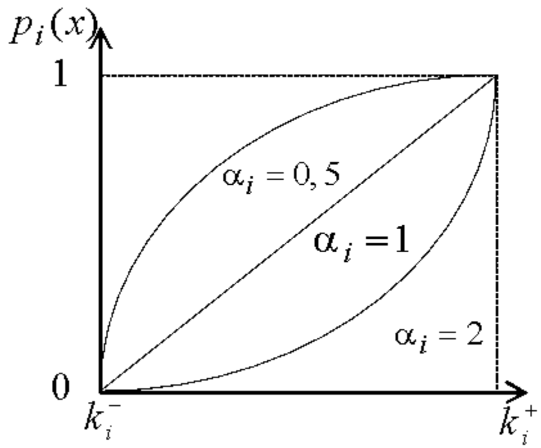

Рис. Графики $p_i(x)$ при различных α_i

Функция локальной полезности

Функция полезности $p_i(x)$ является, в общем случае, интервальной нелинейной шкалой с адаптируемыми к конкретной ситуации параметрами b_i, c_i, α_i:

$$p_i(x) = (b_i \cdot k_i(x) - c_i)^{\alpha_i},$$

где $b_i = \dfrac{1}{k_i^+ - k_i^-}$, $c_i = \dfrac{k_i^-}{k_i^+ - k_i^-}$

Пусть a_i – безразмерные весовые коэффициенты относительной важности частных критериев $k_i(x)$, при этом

$$0 \le a_i \le 1, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

Модели выбора компромиссных решений

I. Известны значения весовых коэффициентов

- *Аддитивная модель многокритериального оценивания*

Функция обобщенной полезности альтернативы $x \in X$ имеет вид

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot p_i(x).$$

Оптимальное решение

$$x^0 = \arg\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot p_i(x) \text{ или } x^0 = \arg\min_{x \in X} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \overline{p}_i(x),$$

где $\overline{p}_i(x) = 1 - p_i(x)$ – функция потери полезности.

Модели выбора компромиссных решений

- *Максиминная (минимаксная) модель компромисса*

Если множество X невыпуклое, то для выбора компромиссного решения используется модели

$$x^0 = \arg \max_{x \in X} \min_{i=1,2,\ldots,n} a_i \cdot p_i(x)$$

или

$$x^0 = \arg \min_{x \in X} \max_{i=1,2,\ldots,n} a_i \cdot \overline{p}_i(x)$$

Модели выбора компромиссных решений

II. Количественные значения весовых коэффициентов неизвестны, но ЛПР располагает информацией, позволяющей ранжировать частные критерии по важности

$$k_1(x) \succ k_2(x) \succ \ldots \succ k_n(x)$$

В данном случае задание предпочтений частных критериев означает

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n$$

Модели выбора компромиссных решений

- *Метод последовательной оптимизации*

Пусть $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot p_i(x)$

Шаг 1. Полагаем $a_1 = 1$, $a_i = 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$

$$X_1^0 = A\,\mathrm{rg}\max_{x \in X} p_1(x)$$

Модели выбора компромиссных решений

- *Метод последовательной оптимизации*

$$\text{Пусть } P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot p_i(x)$$

Шаг 1. Полагаем $a_1 = 1,\ a_i = 0,\ i = 2, 3, \ldots, n$

$$X_1^0 = A\text{rg} \max_{x \in X} p_1(x)$$

Шаг 2. Полагаем $a_2 = 1,\ a_i = 0,\ i = 1, 3, \ldots, n$

$$X_2^0 = A\text{rg} \max_{x \in X_1^0} p_2(x)$$

Модели выбора компромиссных решений

- *Метод последовательной оптимизации*

$$\text{Пусть } P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot p_i(x)$$

Шаг 1. Полагаем $a_1 = 1,\ a_i = 0,\ i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$

$$X_1^0 = Arg \max_{x \in X} p_1(x)$$

Шаг 2. Полагаем $a_2 = 1,\ a_i = 0,\ i = 1,\ 3,\ \ldots,\ n$

$$X_2^0 = Arg \max_{x \in X_1^0} p_2(x)$$

....

Шаг n. Полагаем $a_n = 1,\ a_i = 0,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$

$$x_n^0 = \arg \max_{x \in X_{n-1}^0} p_n(x)$$

Метод последовательной оптимизации

Для случая минимизации потери полезности модель последовательной оптимизации примет вид

$$X_i^0 = A\ \mathrm{rg} \min_{x \in X_{i-1}^0} \overline{p_i}(x),\ i = 1,\ 2,\ ..,\ n,$$

III. ЛПР не располагает информацией о весовых коэффициентах

- Значения весовых коэффициентов a_i, $i=1, 2, \ldots, n$, равнозначны для ЛПР

$$P(x)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} p_i(x) \text{ или } P(x)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} \overline{p}_i(x),$$

а решение определяется в виде

$$x^0=\arg\max_{x\in X} P(x) \text{ или } x^0=\arg\min_{x\in X} P(x).$$

Модели выбора компромиссных решений

- Значения a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, неизвестны

$$P(x) = \min_{i=1,2,\ldots,n} p_i(x) \text{ или } P(x) = \max_{i=1,2,\ldots,n} \overline{p}_i(x)$$

$$x^0 = \arg\max_{x \in X} P(x) \text{ или } x^0 = \arg\min_{x \in X} P(x)$$

Пример задачи выбора решений

альтернатива	$k_1(x) \to \max$	$k_2(x) \to \max$	$k_3(x) \to \min$
x_1	1,8	256	**1500**
x_2	2,0	128	1800
x_3	2,0	256	2600
x_4	2,2	128	2500
x_5	2,5	256	3200
x_6	2,5	128	2700
x_7	2,6	128	3500
x_8	2,6	**512**	4700
x_9	3,0	256	3600
x_{10}	**3,1**	256	4600

$$X = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ x_{10}\}$$

Функция локальной полезности

Для построения функции полезности $p_i(x) = \left(\dfrac{k_i - k_i^-}{k_i^+ - k_i^-} \right)^{\alpha_i}$ определим

$k_1^+ = 3.1$	$k_1^- = 1.8$	$k_1^+ - k_1^- = 1.3$
$k_2^+ = 512$	$k_2^- = 128$	$k_2^+ - k_2^- = 384$
$k_3^+ = 1500$	$k_3^- = 4700$	$k_3^+ - k_3^- = -3200$

Полагаем: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$

Функция локальной полезности

Определим значения функций локальной полезности

x	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
x_1	0,000	0,333	1,000
x_2	0,154	0,000	0,906
x_3	0,154	0,333	0,656
x_4	0,308	0,000	0,688
x_5	0,538	0,333	0,469
x_6	0,538	0,000	0,625
x_7	0,615	0,000	0,375
x_8	0,615	1,000	0,000
x_9	0,923	0,333	0,344
x_{10}	1,000	0,333	0,031

$$p_1(x_2)=\left(\frac{k_1(x_2)-k_1^-}{k_1^+-k_1^-}\right)^{\alpha_1}=\left(\frac{2-1.8}{3.1-1.8}\right)^1=\left(\frac{2-1.8}{1.3}\right)^1=0.154$$

Модель обобщенной полезности

$P(x)$	$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$	$a_1 = 0.3,\ a_2 = 0.5,$ $a_3 = 0.2$	$a_1 = 0.6,\ a_2 = 0.2,$ $a_3 = 0.2$	$a_1 = 0.2,\ a_2 = 0.1,$ $a_3 = 0.7$
$P(x_1)$	0,444	0,367	0,267	0,733
$P(x_2)$	0,353	0,227	0,274	0,665
$P(x_3)$	0,381	0,344	0,290	0,523
$P(x_4)$	0,332	0,230	0,322	0,543
$P(x_5)$	0,447	0,422	0,483	0,469
$P(x_6)$	0,388	0,287	0,448	0,545
$P(x_7)$	0,330	0,260	0,444	0,386
$P(x_8)$	0,538	0,685	0,569	0,223
$P(x_9)$	0,533	0,512	0,689	0,459
$P(x_{10})$	0,455	0,473	0,673	0,255

$$P(x_3) = a_1 p_1(x_3) + a_2 p_2(x_3) + a_3 p_3(x_3) = 0.3 \cdot 0.154 + 0.5 \cdot 0.333 + 0.2 \cdot 0.656 = 0{,}344$$

Модель обобщенной полезности

$P(x)$	$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$	$a_1 = 0.3,\ a_2 = 0.5,\ a_3 = 0.2$	$a_1 = 0.6,\ a_2 = 0.2,\ a_3 = 0.2$	$a_1 = 0.2,\ a_2 = 0.1,\ a_3 = 0.7$
$P(x_1)$	0,444	0,367	0,267	0,733
$P(x_2)$	0,353	0,227	0,274	0,665
$P(x_3)$	0,381	0,344	0,290	0,523
$P(x_4)$	0,332	0,230	0,322	0,543
$P(x_5)$	0,447	0,422	0,483	0,469
$P(x_6)$	0,388	0,287	0,448	0,545
$P(x_7)$	0,330	0,260	0,444	0,386
$P(x_8)$	0,538	0,685	0,569	0,223
$P(x_9)$	0,533	0,512	0,689	0,459
$P(x_{10})$	0,455	0,473	0,673	0,255
$P(x^*)$	**0,538**	**0,685**	**0,689**	**0,733**

$$\max_{x \in X} P(x) = P(x_8) = 0.685, \qquad x^* = \arg\max_{x \in X} P(x) = \{x_8\}$$

Модель максимина

Информация о коэффициентах a_i отсутствует

Определим $x^0 = \arg \max\limits_{x \in X} \min\limits_{i=1,2,3} p_i(x)$

x	$\min\limits_{i=1,2,3} p_i(x)$	x	$\min\limits_{i=1,2,3} p_i(x)$
x_1	0,000	x_6	0,000
x_2	0,000	x_7	0,000
x_3	0,154	x_8	0,000
x_4	0,000	x_9	0,333
x_5	0,333	x_{10}	0,031

Модель максимина

$$\max_{x \in X} \min_{i=1,2,3} p_i(x) = 0.333 \Rightarrow$$

$$\operatorname{Arg} \max_{x \in X} \min_{i=1,2,3} p_i(x) = \{x_5,\ x_9\}$$

Если $k_3 \succ k_1$, то $x^0 = x_5$

Если $k_1 \succ k_3$, то $x^0 = x_9$

ВЫВОДЫ

Применение различных моделей компромисса приводит к различным результатам, что вполне согласуется с теорией.

Каждое из полученных решений определяется не только выбором модели компромисса, но и субъективизмом ЛПР при задании ограничений, упорядочением критериев по важности и коэффициентами важности.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие существуют виды шкал? Приведите примеры.

2. Функция локальной полезности и ее свойства.

3. Приведите основные модели принятия решений в зависимости от степени определенности значений коэффициентов важности частных критериев.