Главное значение несобственных интегралов

Опр. $f(x)$ интегр. в собств. см. на $\forall [a,b] \subset (-\infty,+\infty)$.

Главным значением $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в смысле Коши называется

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \equiv \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Главное значение несобственных интегралов

Опр. $f(x)$ интегр. в собств. см. на $\forall [a,b] \subset (-\infty, +\infty)$. Главным значением $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в смысле Коши называется

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \equiv \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сх. по Риману, то он сх. и по Коши к той же величине. Действ., $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx =$

$$= \lim_{R \to +\infty} \left[\int_{-R}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{R} f(x)dx \right] = \left(\begin{matrix} \text{если сх.} \\ \text{по Риману} \end{matrix} \right) = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{0} f(x)dx +$$

$$+ \lim_{R \to +\infty} \int_{0}^{R} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \ (\text{по Риману})$$

Главное значение несобственных интегралов

Опр. $f(x)$ интегр. в собств. см. на $\forall [a,b] \subset (-\infty, +\infty)$. Главным значением $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в смысле Коши называется

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \equiv \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сх. по Риману, то он сх. и по Коши к той же величине. Действ., $\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx =$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left[\int\limits_{-R}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{R} f(x)dx \right] = \begin{pmatrix} \text{если сх.} \\ \text{по Риману} \end{pmatrix} = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{0} f(x)dx + \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{0}^{R} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \ (\text{по Риману})$$

Но не наоборот. $\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\, dx = \lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{\text{нечёт. ф-я}}\, dx = 0$, но $\int\limits_{0}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\, dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{0} \operatorname{arctg} x\, dx$ расх. Действ. $\int\limits_{0}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\, dx =$

$$= \underbrace{\int\limits_{0}^{\pi/4} \operatorname{arctg} x\, dx}_{\text{собств. инт-л}} + \int\limits_{\pi/4}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\, dx \ \text{— расх. т.к.} \int\limits_{1}^{+\infty} 1 \cdot dx \ \text{расх.}$$

$\operatorname{arctg} x \geq 1$

Главное значение несобственных интегралов

Опр. $f(x)$ интегр. в собств. см. на $\forall [a,b] \subset (-\infty,+\infty)$. Главным значением $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в смысле Коши называется

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \equiv \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Опр. $f(x)$ интегр. в собств. см. на $[a, c-\delta]$ и $[c+\delta, b]$ $\forall \delta \in (0, \min(c-a, b-c))$. Главным значением $\int_a^b f(x)dx$ в смысле Коши называется число

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{\delta\to 0+0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx\right] \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сх. по Риману, то он сх. и по Коши к той же величине. Действ., $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx =$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left[\int_{-R}^{0} f(x)dx + \int_0^R f(x)dx\right] = \begin{pmatrix}\text{если сх.}\\ \text{по Риману}\end{pmatrix} = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{0} f(x)dx +$$

$$+ \lim_{R\to+\infty} \int_0^R f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ (по Риману)}$$

Но не наоборот. $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{\text{неч. ф-я}} dx = 0$, но $\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x\, dx$ и $\int_{-\infty}^{0} \operatorname{arctg} x\, dx$ расх. Действ. $\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x\, dx =$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi/4} \operatorname{arctg} x\, dx}_{\text{собств. инт-л}} + \int_{\pi/4}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\, dx \ - \text{расх. т.к. } \int_1^{+\infty} 1\cdot dx \text{ расх.}$$

$\operatorname{arctg} x \geq 1$

Главное значение несобственных интегралов

Опр. $f(x)$ интегр. в собств. см. на $\forall [a,b] \subset (-\infty,+\infty)$. Главным значением $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в смысле Коши называется

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \equiv \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Опр. $f(x)$ интегр. в собств. см. на $[a, c-\delta]$ и $[c+\delta, b]$ $\forall \delta \in (0, \min(c-a, b-c))$. Главным значением $\int\limits_a^b f(x)dx$ в смысле Коши называется число

$$v.p. \int\limits_a^b f(x)dx \equiv \lim_{\delta\to 0+0} \left[\int\limits_a^{c-\delta} f(x)dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx \right] \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сх. по Риману, то он сх. и по Коши к той же величине. Действ., $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx =$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left[\int\limits_{-R}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{R} f(x)dx \right] = \left(\begin{matrix}\text{если сх.}\\ \text{по Риману}\end{matrix}\right) = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{0} f(x)dx +$$

$$+ \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{0}^{R} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \text{ (по Риману)}$$

Но не наоборот. $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx = \lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{\text{нечёт. ф-я}}dx = 0$, но $\int\limits_{0}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{0} \operatorname{arctg} x\,dx$ расх. Действ. $\int\limits_{0}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx =$

$$= \underbrace{\int\limits_{0}^{\pi/4} \operatorname{arctg} x\,dx}_{\text{собств. инт-л}} + \int\limits_{\pi/4}^{+\infty} \operatorname{arctg} x\,dx \text{ - расх. т.к. } \int\limits_{1}^{+\infty} 1\cdot dx \text{ расх.}$$

$$\operatorname{arctg} x \geq 1$$

Если $\int\limits_a^b f(x)dx$ сх. по Риману, то он сх. и по Коши к той же величине (сделать самостоятельно)

Главное значение несобственных интегралов

Опр. $f(x)$ интегр. в собств. см. на $\forall [a,b]\subset(-\infty,+\infty)$.

Главным значением $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в смысле Коши называется

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \equiv \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Опр. $f(x)$ интегр. в собств. см. на $[a,c-\delta]$ и $[c+\delta,b]$ $\forall\delta\in(0,\min(c-a,\ b-c))$. Главным значением $\int\limits_a^b f(x)dx$ в смысле Коши называется число

$$v.p.\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{\delta\to0+0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)dx+\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx\right] \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сх. по Риману, то он сх. и по Коши к той же величине. Действ., $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx=$

$$=\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{0} f(x)dx+\int_0^R f(x)dx\right]=\left(\begin{matrix}\text{если сх.}\\ \text{по Риману}\end{matrix}\right)=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{0} f(x)dx+$$

$$+\lim_{R\to+\infty}\int_0^R f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_0^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \ (\text{по Риману})$$

Но не наоборот. $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg}x\,dx=\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R}\underbrace{\operatorname{arctg}x}_{\text{нечёт. ф-я}}dx=0$, но

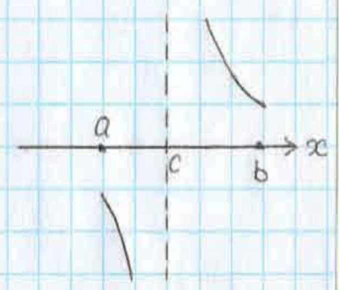
$\int\limits_0^{+\infty}\operatorname{arctg}x\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{0}\operatorname{arctg}x\,dx$ расх. Действ. $\int\limits_0^{+\infty}\operatorname{arctg}x\,dx=$

$$=\underbrace{\int_0^{\pi/4}\operatorname{arctg}x\,dx}_{\text{собств. инт-л}}+\int_{\pi/4}^{+\infty}\operatorname{arctg}x\,dx \ - \text{расх. т.к. } \int_1^{+\infty}1\cdot dx \text{ расх.}$$

$\operatorname{arctg}x\geq 1$

Если $\int\limits_a^b f(x)dx$ сх. по Риману, то он сх. и по Коши к той же величине (сделать самостоятельно)

Но не наоборот. Пусть $a<c<b$



$$v.p.\int_a^b\frac{dx}{x-c}=\lim_{\delta\to0+0}\left[\int_a^{c-\delta}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\delta}^{b}\frac{dx}{x-c}\right]=$$

$$=\lim_{\delta\to0+0}\left[\ln(c-x)\Big|_{x=a}^{c-\delta}+\ln(x-c)\Big|_{c+\delta}^{x=b}\right]=$$

$$=\lim_{\delta\to0+0}\left[\underbrace{\ln\delta-\ln(c-a)}_{\nexists\lim\limits_{\delta\to0+0}}+\underbrace{\ln(b-c)-\ln\delta}_{\nexists\lim\limits_{\delta\to0+0}}\right]=\ln(b-c)-\ln(c-a)=\ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right|$$

Главное значение несобственных интегралов

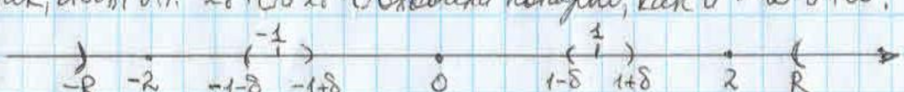
Опр. $f(x)$ интегр. в собств. см. на $\forall[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$. Главным значением $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в смысле Коши называется

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \equiv \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Опр. $f(x)$ интегр. в собств. см. на $[a, c-\delta]$ и $[c+\delta, b]$ $\forall\delta\in(0, \min(c-a, b-c))$. Главным значением $\int_a^b f(x)dx$ в смысле Коши называется число

$$v.p.\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{\delta\to0+0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)dx+\int_{c+\delta}^b f(x)dx\right] \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Если несколько О.Т., то промежуток интегрир. разбиваем так, чтобы О.Т. x_0+0 и x_0-0 входили попарно, как и $-\infty$ и $+\infty$.



$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1} = \lim_{\delta_1\to0+0}\left[\int_{-2}^{-1-\delta_1}\frac{dx}{x^2-1}+\int_{-1+\delta_1}^{0}\frac{dx}{x^2-1}\right]+\lim_{\delta_2\to0+0}\left[\int_{0}^{1-\delta_2}\frac{dx}{x^2-1}+\int_{1+\delta_2}^{2}\frac{dx}{x^2-1}\right]+$$

$$+\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{-2}\frac{dx}{x^2-1}+\int_{2}^{R}\frac{dx}{x^2-1}\right]=$$

Если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сх. по Риману, то он сх. и по Коши к той же величине. Действ.,

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx=\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{R} f(x)dx\right]=\left(\begin{matrix}\text{если сх.}\\ \text{по Риману}\end{matrix}\right)=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{0} f(x)dx+$$

$$+\lim_{R\to+\infty}\int_{0}^{R} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \ (\text{по Риману})$$

Но не наоборот. $v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arctg}x\,dx=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\underbrace{\operatorname{arctg}x}_{\text{нечёт. ф-я}}dx=0$, но $\int_{0}^{+\infty}\operatorname{arctg}x\,dx$ и $\int_{-\infty}^{0}\operatorname{arctg}x\,dx$ расх. Действ. $\int_{0}^{+\infty}\operatorname{arctg}x\,dx=$

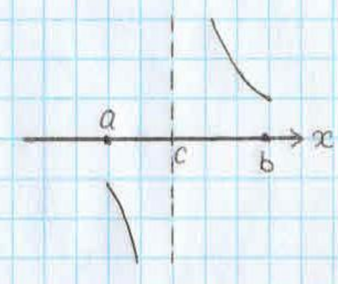
$$=\underbrace{\int_0^{\pi/4}\operatorname{arctg}x\,dx}_{\text{собств. инт-л}}+\int_{\pi/4}^{+\infty}\operatorname{arctg}x\,dx \ - \text{расх. т.к.} \int_1^{+\infty}1\cdot dx \text{ расх.}$$

$\operatorname{arctg}x\geq1$

Если $\int_a^b f(x)dx$ сх. по Риману, то он сх. и по Коши к той же величине (сделать самостоятельно)

Но не наоборот. Пусть $a<c<b$

$$v.p.\int_a^b\frac{dx}{x-c}=\lim_{\delta\to0+0}\left[\int_a^{c-\delta}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\delta}^{b}\frac{dx}{x-c}\right]=$$



$$=\lim_{\delta\to0+0}\left[\ln(c-x)\Big|_{x=a}^{c-\delta}+\ln(x-c)\Big|_{c+\delta}^{x=b}\right]=$$

$$=\lim_{\delta\to0+0}\Big[\underbrace{\ln\delta-\ln(c-a)}_{\exists\lim\limits_{\delta\to0+0}}+\underbrace{\ln(b-c)-\ln\delta}_{\exists\lim\limits_{\delta\to0+0}}\Big]=\ln(b-c)-\ln(c-a)=\ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right|$$

Главное значение несобственных интегралов

Опр. $f(x)$ интегр. в собств. см. на $\forall[a,b]\subset(-\infty,+\infty)$. Главным значением $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в смысле Коши называется

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \equiv \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Опр. $f(x)$ интегр. в собств. см. на $[a,c-\delta]$ и $[c+\delta,b]$ $\forall\delta\in(0,\min(c-a,b-c))$. Главным значением $\int_a^b f(x)dx$ в смысле Коши называется число

$$v.p.\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{\delta\to0+0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)dx+\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx\right] \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Если несколько о.т., то промежуток интегрир. разбивают так, чтобы о.т. x_0+0 и x_0-0 входили попарно, как и $-\infty$ и $+\infty$.

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}=\lim_{\delta_1\to0+0}\left[\int_{-2}^{-1-\delta_1}\frac{dx}{x^2-1}+\int_{-1+\delta_1}^{0}\frac{dx}{x^2-1}\right]+\lim_{\delta_2\to0+0}\left[\int_{0}^{1-\delta_2}\frac{dx}{x^2-1}+\int_{1+\delta_2}^{2}\frac{dx}{x^2-1}\right]+$$

$$+\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{-2}\frac{dx}{x^2-1}+\int_{2}^{R}\frac{dx}{x^2-1}\right]=\lim_{\delta_1\to0+0}\left[\frac12\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_{-2}^{-1-\delta_1}+\frac12\ln\frac{1-x}{1+x}\Big|_{-1+\delta_1}^{0}\right]+$$

$$+\lim_{\delta_2\to0+0}\left[\frac12\ln\frac{1-x}{1+x}\Big|_{0}^{1-\delta_2}+\frac12\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_{1+\delta_2}^{2}\right]+\lim_{R\to+\infty}\left[\frac12\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_{-R}^{-2}+\right.$$

$$\left.+\frac12\ln\frac{x-1}{x+1}\Big|_{2}^{R}\right]=\frac12\lim_{\delta_1\to0+0}\left[\ln\frac{2+\delta_1}{\delta_1}-\ln3-\ln\frac{2-\delta_1}{\delta_1}\right]+$$

$$+\frac12\lim_{\delta_2\to0+0}\left[\ln\frac{\delta_2}{2-\delta_2}+\ln\frac13-\ln\frac{\delta_2}{2+\delta_2}\right]+\frac12\lim_{R\to+\infty}\left[\ln3-\ln\frac{R+1}{R-1}+\ln\frac{R-1}{R+1}-\ln\frac13\right]=\frac12\lim_{\delta_1\to0+0}\ln\frac{2+\delta_1}{2-\delta_1}-\frac12\ln3+$$

$$+\frac12\lim_{\delta_2\to0+0}\ln\frac{2+\delta_2}{2-\delta_2}-\frac12\ln3-\lim_{R\to+\infty}\frac{R+1}{R-1}+\ln3=0,\ \text{т.е.}\ v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}=0$$

Если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ сх. по Риману, то он сх. и по Коши к той же величине. Действ., $v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx=$

$$=\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{R} f(x)dx\right]=\left(\begin{matrix}\text{если сх.}\\ \text{по Риману}\end{matrix}\right)=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{0} f(x)dx+$$

$$+\lim_{R\to+\infty}\int_{0}^{R} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \ (\text{по Риману})$$

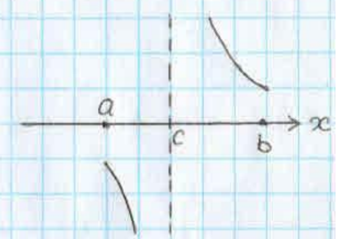
Но не наоборот. $v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arctg}x\,dx=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}\underbrace{\operatorname{arctg}x}_{\text{нечёт. ф-я}}dx=0$, но $\int_{0}^{+\infty}\operatorname{arctg}x\,dx$ и $\int_{-\infty}^{0}\operatorname{arctg}x\,dx$ расх. Действ. $\int_{0}^{+\infty}\operatorname{arctg}x\,dx=$

$$=\underbrace{\int_{0}^{\pi/4}\operatorname{arctg}x\,dx}_{\text{собств. инт-л}}+\int_{\pi/4}^{+\infty}\operatorname{arctg}x\,dx \ - \text{расх. т.к.} \int_{1}^{+\infty}1\cdot dx \ \text{расх.}$$

$\operatorname{arctg}x\geq1$

Если $\int_a^b f(x)dx$ сх. по Риману, то он сх. и по Коши к той же величине (сделать самостоятельно)

Но не наоборот. Пусть $a<c<b$

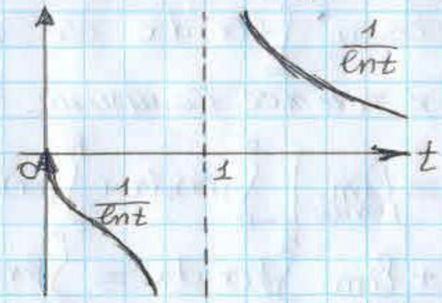


$$v.p.\int_a^b\frac{dx}{x-c}=\lim_{\delta\to0+0}\left[\int_a^{c-\delta}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\delta}^{b}\frac{dx}{x-c}\right]=$$

$$=\lim_{\delta\to0+0}\left[\ln(c-x)\Big|_{x=a}^{c-\delta}+\ln(x-c)\Big|_{c+\delta}^{x=b}\right]=$$

$$=\lim_{\delta\to0+0}\left[\underbrace{\ln\delta-\ln(c-a)}_{\nexists\lim\limits_{\delta\to0+0}}+\underbrace{\ln(b-c)-\ln\delta}_{\nexists\lim\limits_{\delta\to0+0}}\right]=\ln(b-c)-\ln(c-a)=\ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right|$$

3. $li(x) = \text{v.p.} \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t}, x \geq 0$



0+0 не явл. о.т., т.к. $\lim\limits_{t\to 0+0} \frac{1}{\ln t} = 0$

$x \in [0, 1) \Rightarrow \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t}$ – собств.

$x = 1 \Rightarrow \int\limits_0^1 \frac{dt}{\ln t}$ – несобств. инт-л с о.т. 1−0 на конце

$\int\limits_0^1 \frac{dt}{\ln t}$ расх., т.к. $\frac{1}{\ln t} \sim \frac{1}{t-1}$ $(t \to 1-0)$ а $\int\limits_0^1 \frac{dt}{t-1}$ расх.

$$\Rightarrow li(-1) = -\infty$$

$x > 1 \Rightarrow \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t}$ расх. по Риману. Действительно,

$\int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\ln t} + \int\limits_1^x \frac{dt}{\ln t}$, $\frac{1}{\ln t} \sim \frac{1}{t-1}$ $(t \to 1 \pm 0)$,

а $\int\limits_0^1 \frac{dt}{t-1}$ и $\int\limits_1^x \frac{dt}{t-1}$ расх.

Установим, что $\forall x > 1\ \exists\ \text{v.p.} \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t}$.

$$\lim_{t\to 1}\left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right) = \lim_{t\to 1} \frac{t-1-\ln t}{(t-1)\ln t} = \lim_{t \to 1} \frac{1 - \frac{1}{t}}{\ln t + \frac{t-1}{t}} =$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{2}.$$ Введём функцию:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}, & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2}, & t = 1 \\ \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}, & t > 1 \end{cases}$$

$\varphi(t)$ непр. на $[0, +\infty)$

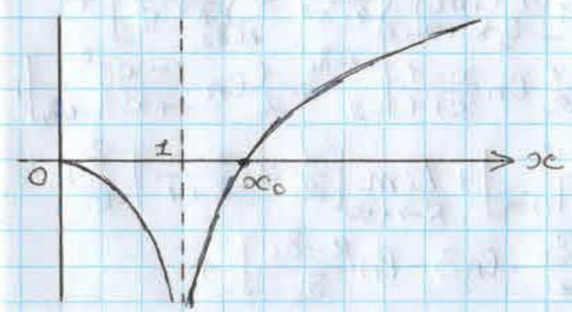
$$\frac{1}{\ln t} = \varphi(t) + \frac{1}{t-1}$$
$(0 < t < 1,\ 1 < t < +\infty)$

$$\Rightarrow li(x) = \text{v.p.} \int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t} =$$
$$= \text{v.p.} \int\limits_0^x \left[\varphi(t) + \frac{1}{t-1}\right] dt =$$
$$= \underbrace{\int\limits_0^x \varphi(t)\,dt}_{\text{собств. инт.}} + \text{v.p.} \int\limits_0^x \frac{dt}{t-1} =$$
$$= \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt + \ln\left|\frac{x-1}{0-1}\right| =$$
$$= \int\limits_0^x \varphi(t)\,dt + \ln|x-1|$$

Итак, $li(x)$ определён на $[0, 1) \cup (1, +\infty)$,

причём $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} li(x) = -\infty$

$$(li(x))'_x = \frac{1}{\ln x}$$
$$(x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)).$$



$x_0 = 1{,}451369234883\ldots$

x_0 – число Рамануджана.

4. Γ-функция Эйлера $\quad \Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \quad (x>0)$

$$\int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = \underbrace{\int\limits_0^{1} t^{x-1}e^{-t}\,dt}_{\substack{\text{сх. при } x>0 \\ \text{расх. при } x\leq 0}} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt}_{\text{сх. } \forall x}$$

$f(t)=t^{x-1}e^{-t}$

$f(t)\sim t^{x-1}=\dfrac{1}{t^{1-x}} \quad (t\to 0+)$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{x+1}}{e^t} = (\text{Пр. Лопиталя}) = \ldots = 0 \Rightarrow$$

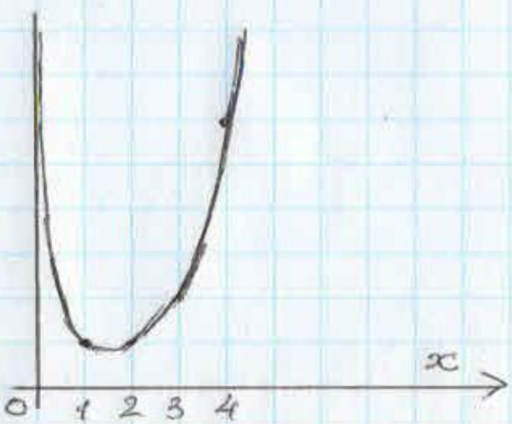
$$\Rightarrow \exists\, t_0 :\ 0 < t^{x+1}e^{-t} < 1 \quad \forall t > t_0 \Rightarrow 0 < f(t) = t^{x-1}e^{-t} < \frac{1}{t^2}$$

$\Gamma(x)$ опред. при $x>0$, $\quad \Gamma(x)>0 \quad \forall x>0$

$$x>0 \quad \Gamma(x+1)=\int\limits_0^{+\infty} t^{x}e^{-t}\,dt = -\int\limits_0^{+\infty} t^{x}\,d(e^{-t}) =$$

$$= -t^{x}e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}x t^{x-1}\,dt = x\Gamma(x)$$

$$\boxed{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\ x>0}$$



$$\Gamma(1)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = -e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = 1. \quad \Gamma(2)=\Gamma(1+1)=1\cdot\Gamma(1)=1$$

$$\Gamma(3)=\Gamma(2+1)=2\Gamma(2)=2, \ldots \quad \Gamma(n)=(n-1)!\ , \ n\in\mathbb{N}$$

Вывести самостоятельно (ММИ)