

Главное значение несходственных интегралов

Оп. $f(x)$ интегр. в смысле $\int_a^b f(x) dx$ на $\forall [a, b] \subset (-\infty, +\infty)$.

Главным значением $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ в смысле Коши называется

$$\text{v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \equiv \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Главное значение

несходственных интегралов

Оп. $f(x)$ интегр. в смыс. си. на $\forall [a, b] \subset (-\infty, +\infty)$.

Главным значением $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ в смысле Коши называется

$$\text{в.п. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ си. по Риману, то он си. и по Коши

к тому же величине. Докл., в.п. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx =$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_0^R f(x) dx + \int_{-R}^0 f(x) dx \right] = (\text{если си. }) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x) dx +$$

$$+ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ (по Риману)}$$

Главное значение
несовпадающих интегралов

Оп. $f(x)$ интегр. в смыс. си. на $A[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$.

Главным значением $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в смысле Коши называется

$$\text{в.п. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ си. по Риману, то он си. и по Коши к той же величине. Дейст., в.п. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx =$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_0^R f(x)dx + \int_{-R}^0 f(x)dx \right] = (\text{если си. }) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x)dx +$$

$$+ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad (\text{но Риман})$$

Но не наоборот. в.п. $\int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \arctg x dx = 0$, но

$\int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx$ паеч. Дейст. $\int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx =$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi/4} \arctg x dx}_{(0)} + \underbrace{\int_{\pi/4}^{+\infty} \arctg x dx}_{+\infty} - \text{паеч. т.к. } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ паеч.}$$

согласн. ини. $\arctg x \geq 1$

Главное значение несходственных интегралов

Оп. $f(x)$ интегр. в смыс. с. на $\forall [a, b] \subset (-\infty, +\infty)$.

Главным значением $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ в смысле Коши называется

$$\text{v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \equiv \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Оп. $f(x)$ интегр. в смыс. с. на $[a, c-\delta] \cup [c+\delta, b]$

$\forall \delta \in (0, \min(c-a, b-c))$. Главным значением $\int_a^b f(x) dx$

в смысле Коши называется число

$$\text{v.p. } \int_a^b f(x) dx \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx \right] \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ с. по Риману, то он с. и по Коши

к той же величине. Действ., в.п. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_{-R}^0 f(x) dx + \int_0^R f(x) dx \right] = (\text{если с. }) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x) dx +$$

$$+ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx + \int_0^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (\text{но Риман})$$

Но не наоборот. в.п. $\int_a^b \arctg x dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R \arctg x dx = 0$, но

$\int_a^b \arctg x dx$ и $\int_a^R \arctg x dx$ пак. Действ. $\int_a^b \arctg x dx =$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi/4} \arctg x dx}_{\text{с. по Коши}} + \underbrace{\int_{\pi/4}^R \arctg x dx}_{\text{пак. т. к. }} - \text{пак.}$$

$\arctg x \geq 1$

Главное значение несобственных интегралов

Оп. $f(x)$ интегр. в смыс. си. на $\forall [a, b] \subset (-\infty, +\infty)$.

Главным значением $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ в смысле Коши называется

$$\text{v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \equiv \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Оп. $f(x)$ интегр. в смыс. си. на $[a, c-\delta] \cup [c+\delta, b]$

$\forall \delta \in (0, \min(c-a, b-c))$, Главным значением $\int_a^b f(x) dx$

в смысле Коши называется число

$$\text{v.p. } \int_a^b f(x) dx \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx \right] \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ си. по Риману, то он си. и по Коши к той же величине. Докл., в.п. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_0^R f(x) dx + \int_{-R}^0 f(x) dx \right] = (\text{если си.}) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x) dx + \\ + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (\text{по Риману})$$

Но не подходит. в.п. $\int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \arctg x dx = 0$, но

$$\int_0^{\pi/4} \arctg x dx \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx \text{ пак.} \quad \text{Докл. } \int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx = \\ = \underbrace{\int_0^{\pi/4} \arctg x dx}_{\text{содоб. ит. 1}} + \underbrace{\int_{\pi/4}^R \arctg x dx}_{\text{ит. 2}} - \text{пак. т.к. } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ пак.}$$

Если $\int_a^b f(x) dx$ си. по Риману, то он си. и по Коши к той же величине (см. в.п. синтезировано)

Главное значение несобственных интегралов

Оп. $f(x)$ интегр. в смысле К. на $A[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$.

Главным значением $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ в смысле К. называется

$$\text{v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \equiv \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Оп. $f(x)$ интегр. в смысле К. на $[a, c-\delta] \cup [c+\delta, b]$

$\forall \delta \in (0, \min(c-a, b-c))$, Главным значением $\int_a^b f(x) dx$

в смысле К. называется число

$$\text{v.p. } \int_a^b f(x) dx \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx \right] \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ сх. по Риману, то он сх. и по Коши

к той же величине. Действ., в.п. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx =$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_{-R}^0 f(x) dx + \int_0^R f(x) dx \right] = \left(\begin{array}{l} \text{если сх.} \\ \text{по Риману} \end{array} \right) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x) dx +$$

$$+ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (\text{по Риману})$$

Но не всегда. в.п. $\int_{-\infty}^{+\infty} \arct g x dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \arct g x dx = 0$, но

$\int_{-\infty}^{+\infty} \arct g x dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \arct g x dx$ паэ. Действ. $\int_{-\infty}^{+\infty} \arct g x dx =$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi/4} \arct g x dx}_{\text{согласн.}} + \underbrace{\int_{\pi/4}^{+\infty} \arct g x dx}_{\text{не согласн.}} - \text{паэ. т.к. } \int_1^{+\infty} 1/x dx \text{ паэ.}$$

$\arct g x \geq 1$

Если $\int_a^b f(x) dx$ сх. по Риману, то он сх. и по Коши

к той же величине (содержит сходимость)

Но не всегда. Пусть $a < c < b$

$$\text{v.p. } \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\int_a^{c-\delta} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\delta}^b \frac{dx}{x-c} \right] =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\ln(c-x) \Big|_{x=a}^{c-\delta} + \ln(x-c) \Big|_{c+\delta}^b \right] =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\underbrace{\ln \delta - \ln(c-a)}_{\exists \lim_{\delta \rightarrow 0+0}} + \underbrace{\ln(b-c) - \ln \delta}_{\exists \lim_{\delta \rightarrow 0+0}} \right] = \ln(b-c) - \ln(c-a) = \ln \frac{b-c}{a-c}$$

Главное значение несобственных интегралов

Оп. $f(x)$ интегр. в сущ. си. на $\forall [a, b] \subset (-\infty, +\infty)$.

Главным значением $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в смысле Коши называется

$$\text{в.п. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \equiv \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Оп. $f(x)$ интегр. в сущ. си. на $[a, c-\delta] \cup [c+\delta, b]$

$\forall \delta \in (0, \min(c-a, b-c))$, Главным значением $\int_a^b f(x)dx$

в смысле Коши называется число

$$\text{в.п. } \int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right] \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Если несконч. О.Т., то применяют к интегр. разбиение так, чтобы О.Т. $x_0 + 0$ и $x_0 - 0$ входили попарно, как $-\infty$ и $+\infty$.

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{-\infty} -2 \xrightarrow{-1} -1-\delta \xrightarrow{-1+\delta} 0 \xrightarrow{1-\delta} 1+\delta \xrightarrow{2} R \xrightarrow{\infty} \\ & \text{в.п. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\int_{-2}^{-1-\delta} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{-1-\delta}^0 \frac{dx}{x^2-1} \right] + \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\int_0^{1-\delta} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{1-\delta}^2 \frac{dx}{x^2-1} \right] + \\ & + \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_{-R}^{-2} \frac{dx}{x^2-1} + \int_2^R \frac{dx}{x^2-1} \right] = \end{aligned}$$

Если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ си. по Риману, то он си. и по Коши к той же величине. Действ. в.п. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx =$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_R^0 f(x)dx + \int_0^{-R} f(x)dx \right] = \left(\begin{array}{l} \text{если си.} \\ \text{по Риману} \end{array} \right) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x)dx +$$

$$+ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad (\text{по Риману})$$

Но не всегда. в.п. $\int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \arctg x dx = 0$, но

$$\int_{-\infty}^0 \arctg x dx \text{ и } \int_0^{+\infty} \arctg x dx \text{ паеч.} \quad \text{Действ. } \int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx =$$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi/4} \arctg x dx}_{\text{сост-б. и н.л.}} + \underbrace{\int_{\pi/4}^{+\infty} \arctg x dx}_{\text{арктг } x \geq 1} - \text{паеч. т.к. } \int_1^{+\infty} 1 dx \text{ паеч.}$$

Если $\int_a^b f(x)dx$ си. по Риману, то он си. и по Коши

к той же величине (сходимость симметрична)

Но не всегда. Пусть $a < c < b$

$$\text{в.п. } \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\int_a^{c-\delta} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\delta}^b \frac{dx}{x-c} \right] =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\ln(x-c) \Big|_{x=a}^{c-\delta} + \ln(x-c) \Big|_{c+\delta}^b \right] =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\underbrace{\ln \delta - \ln(c-a)}_{\exists \lim} + \underbrace{\ln(b-c) - \ln \delta}_{\exists \lim} \right] = \ln(b-c) - \ln(c-a) = \ln \left| \frac{b-c}{a-c} \right|$$

Главное значение несобственных интегралов

Оп. $f(x)$ интегр. в смыс. си. на $A[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$.

Главное значение $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ в смысле Коши называется

$$\text{v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx \quad (\text{если } \exists \lim)$$

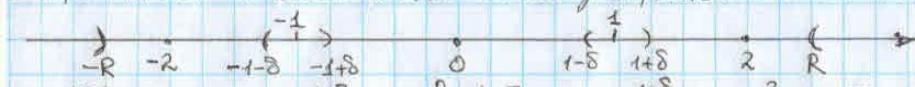
Оп. $f(x)$ интегр. в смыс. си. на $[a, c-\delta] \cup [c+\delta, b]$

$\forall \delta \in (0, \min(c-a, b-c))$. Главное значение $\int_a^b f(x)dx$

в смысле Коши называется именем

$$\text{v.p. } \int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right] \quad (\text{если } \exists \lim)$$

Если несколько О.Т., то применяют к интегралу разбиение так, чтобы 1 О.Т. $x_0 + 0$ и $x_0 - 0$ входят попарно, как и $-\infty$ и $+\infty$.



$$\text{v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\int_{-2-\delta}^{-1-\delta} \frac{dx}{x^2-1} + \int_0^{1+\delta} \frac{dx}{x^2-1} \right] + \lim_{\delta_2 \rightarrow 0+0} \left[\int_0^{1-\delta_2} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{1+\delta_2}^2 \frac{dx}{x^2-1} \right] +$$

$$+ \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_{-R}^{-2} \frac{dx}{x^2-1} + \int_2^R \frac{dx}{x^2-1} \right] = \lim_{\delta_1 \rightarrow 0+0} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} \Big|_{-2}^{-1-\delta_1} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \Big|_{1+\delta_1}^0 \right] +$$

$$+ \lim_{\delta_2 \rightarrow 0+0} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x} \Big|_0^{1-\delta_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} \Big|_{1+\delta_2}^2 \right] + \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} \Big|_{-R}^{-2} + \right.$$

$$+ \left. \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} \Big|_2^R \right] = \frac{1}{2} \lim_{\delta_1 \rightarrow 0+0} \left[\ln \frac{2+\delta_1}{\delta_1} - \ln 3 - \ln \frac{2-\delta_1}{\delta_1} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0+0} \left[\ln \frac{\delta_2}{2-\delta_2} + \ln \frac{1}{3} - \ln \frac{\delta_2}{2+\delta_2} \right] + \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\ln 3 - \ln \frac{R+1}{R-1} + \ln \frac{R-1}{R+1} - \ln \frac{1}{3} \right] =$$

$$+ \frac{1}{2} \lim_{\delta_2 \rightarrow 0+0} \ln \frac{2+\delta_2}{2-\delta_2} - \frac{1}{2} \ln 3 - \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R+1}{R-1} + \ln 3 = 0, \text{ т.е.}$$

если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ си. по Риману, то он си. и по Коши

к той же величине. Докл., в.п. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x)dx$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_{-R}^0 f(x)dx + \int_0^R f(x)dx \right] = \begin{cases} \text{если си.} \\ \text{по Риману} \end{cases} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^0 f(x)dx +$$

$$+ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad (\text{по Риману})$$

Но не подходит. в.п. $\int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \arctg x dx = 0$, но

$\int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx$ паэх. Докл. $\int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx =$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi/4} \arctg x dx}_{\text{содоб. ини.}} + \underbrace{\int_{\pi/4}^{+\infty} \arctg x dx}_{\text{паэх. т.к. }} - \text{паэх.} \quad \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+x^2} dx \text{ паэх.}$$

если $\int_a^b f(x)dx$ си. по Риману, то он си. и по Коши

к той же величине (сходимость сходимости и т.д.)

Но не подходит. Пусть $a < c < b$

$$\text{v.p. } \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\int_a^{c-\delta} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\delta}^b \frac{dx}{x-c} \right] =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\ln(x-c) \Big|_{x=a}^{c-\delta} + \ln(x-c) \Big|_{c+\delta}^b \right] =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \left[\underbrace{\ln \delta - \ln(c-a)}_{\exists \lim_{\delta \rightarrow 0+0}} + \underbrace{\ln(b-c) - \ln \delta}_{\exists \lim_{\delta \rightarrow 0+0}} \right] = \ln(b-c) - \ln(c-a) = \ln \frac{b-c}{c-a}$$

$$+ \frac{1}{2} \lim_{\delta_1 \rightarrow 0+0} \ln \frac{2+\delta_1}{2-\delta_1} - \frac{1}{2} \ln 3 +$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = 0$$

$$3. \text{li}(x) = \text{v.p.} \int_0^x \frac{dt}{\ln t}, x \geq 0$$

$0+0$ не обн. о. т.к. $\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{\ln t} = 0$

$$x \in [0, 1) \Rightarrow \int_0^x \frac{dt}{\ln t} - \text{состб.}$$

$x=1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{\ln t} - \text{некостб. икнн с } 0, \bar{t}, 1-0 \text{ на коне.}$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\ln t} \text{ пакх., т.к. } \frac{1}{\ln t} \sim \frac{1}{t-1} \quad (t \rightarrow 1-0) \text{ а } \int_0^1 \frac{dt}{t-1} \text{ пакх.}$$

$$\Rightarrow \text{li}(-1) = -\infty$$

$x > 1 \Rightarrow \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \text{ пакх. по Пашуану. Доказываемо,}$

$$\int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \int_0^1 \frac{dt}{\ln t} + \int_1^x \frac{dt}{\ln t} > \frac{1}{\ln t} \sim \frac{1}{t-1} \quad (t \rightarrow 1 \pm 0),$$

а $\int_0^1 \frac{dt}{t-1}$ и $\int_1^x \frac{dt}{t-1}$ пакх.

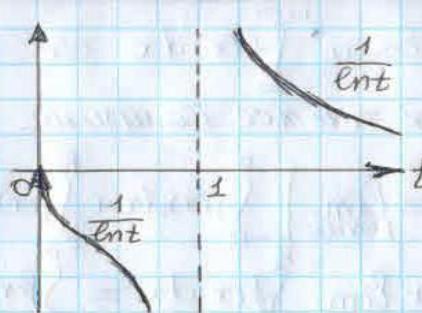
Установлено, что $\forall x > 1 \exists \text{ v.p.} \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$.

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1-\ln t}{(t-1)\ln t} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{1-1}{t}}{\ln t + \frac{t-1}{t}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{2}. \quad \text{Введём функцию:}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t=0 \\ \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}, & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2}, & t=1 \\ \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}, & t > 1 \end{cases} \quad (\varphi(t) \text{ непр. на } [0, +\infty))$$

$$\frac{1}{\ln t} = \varphi(t) + \frac{1}{t-1} \quad (0 < t < 1, 1 < t < +\infty)$$



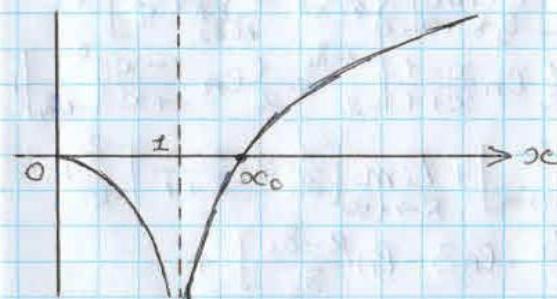
$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{li}(x) &= \text{v.p.} \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \\ &= \text{v.p.} \int_0^x \left[\varphi(t) + \frac{1}{t-1} \right] dt = \\ &= \int_0^x \varphi(t) dt + \text{v.p.} \int_0^x \frac{dt}{t-1} = \\ &\stackrel{\text{состб. икнн.}}{=} \int_0^x \varphi(t) dt + \ln \left| \frac{x-1}{0-1} \right| = \\ &= \int_0^x \varphi(t) dt + \ln |x-1| \end{aligned}$$

Чтак, $\text{li}(x)$ определен
на $[0, 1) \cup (1, +\infty)$,

$$\text{и при этом } \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \text{li}(x) = -\infty$$

$$(\text{li}(x))'_x = \frac{1}{\ln x}$$

$$(x \in [0, 1) \cup (1, +\infty)).$$



$$x_0 = 1.451369234883\dots$$

x_0 - число Рамануджана.

4. Гамма-функция Эйлера $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \underbrace{\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt}_{\text{если } x > 0} + \underbrace{\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt}_{\forall x}$$

если $x > 0$
если $x \leq 0$

$$f(t) = t^{x-1} e^{-t}$$

$$f(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} \quad (t \rightarrow 0^+)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{x+1} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = (\text{п. л. н. о.}) = \dots = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists t_0 : 0 < t^{x+1} e^{-t} < 1 \quad \forall t > t_0 \Rightarrow 0 < f(t) = t^{x-1} e^{-t} < \frac{1}{t^2}$$

$\Gamma(x)$ определена для $x > 0$, $\Gamma'(x) > 0 \quad \forall x > 0$

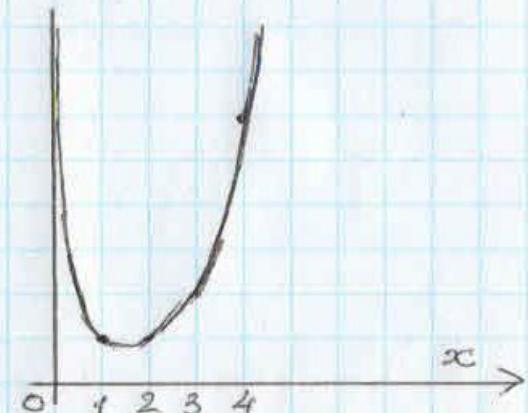
$$x > 0 \quad \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = - \int_0^{+\infty} t^x d(e^{-t}) =$$

$$= -t^x e^{-t} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot x t^{x-1} dt = x \Gamma(x)$$

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), x > 0}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 1. \quad \Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2 \Gamma(2) = 2, \dots, \Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}$$



Вычисление с помощью интеграла (МНН)