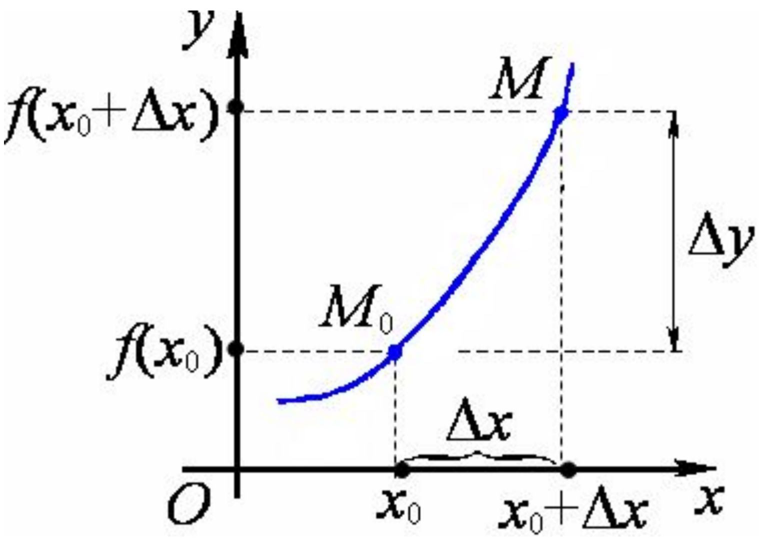
Производная и дифференциал функции

Определение. Пусть функция определена на некоторой окрестности точки x_0 и пусть существует конечный предел отношения

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

при $\Delta x \to 0$ Тогда этот предел называется *производной функции* в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$,   т. е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$



Операция вычисления производной называется ***дифференцированием*.**

Функция, имеющая производную в точке называется *дифференцируемой* в этой точке.

Производная функции является также функцией.

Дифференцируемость – более сильное условие на функцию, чем непрерывность.

Теорема. Всякая функция, дифференцируемая в точке непрерывна в этой точке.

Доказательство:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = o(\Delta x),$$ где $o(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Следовательно $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x \cdot o(\Delta x),$

т. е. $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ а следовательно функция непрерывна.

Примечание. Обратное утверждение неверно. Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна, но не дифференцируема в точке $x_0 = 0.$

Таблица производных некоторых функций

$c' = 0 \ (c - \text{const})$	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(e^x)' = e^x.$
$(kx+b)' = k$ $x' = 1$ $(-x)' = -1$	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \ x > 0.$
$x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1}$ $(\alpha \in R)$	$(arcsinx)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(a^x)' = a^x \ln a, \ a > 0, \ a \neq 1.$
$(x^2)' = 2x$	$(arccosx)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a},$ $x > 0, \ a > 0, \ a \neq 1.$
$\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	
$(sinx)' = cosx$		
$(cosx)' = -sinx$		

Правила дифференцирования

$(c \cdot u(x))' = cu'(x)$ (c — постоянная).	Постоянный множитель можно выносить за знак производной.
$(u + v)' = u' + v'$.	Производная суммы функций, равна сумме их производных.
$(u \cdot v)' = u'v + v'u$	Производная произведения
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0)$	Производная частного
$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$	Производная сложной функции (функции от функции)

$(5x^2)'$

$(x^{23})'$

$\left(\frac{1}{x^9}\right)'$

$(\sin x + \sqrt{x})'$

$(4x \cdot \cos x)'$

$\left(\frac{2x+3}{\sin x}\right)'$

$(\sin 14x)'$

$\left(tg\frac{x}{2}\right)'$

$\left(\frac{1}{x^2+4x}\right)'$

$(\sqrt{\sin x})'$

$\left(\frac{x+10}{x+8}\right)'$

$\left(\frac{1}{(4x-5)^6}\right)'$

Найти производную функции (1 — 15).

1. $\boxed{3}$ $x^2-\frac{1}{x}+3.$

2. $\boxed{2}$ $-\frac{1}{3}x^{15}.$

3. $\boxed{4}$ $-2x^3+12\sqrt{x}.$

4. $\boxed{4}$ $\frac{7}{\sqrt[4]{x}}-\frac{3}{x}.$

5. $\boxed{4}$ $(x-6)x^3.$

6. $\boxed{5}$ $\sqrt{x}\left(x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$

7. $\boxed{5}$ $\sqrt{6x+1}\cdot(x^4-5).$

8. $\boxed{5}$ $x\left(\frac{x}{3}+1\right)^3.$

9. $\boxed{5}$ $\frac{2x+3}{3-2x}.$

10. $\boxed{5}$ $\frac{x^3}{2x-3}.$

11. $\boxed{5}$ $\frac{x^4+x^2+1}{x+1}.$

12. $\boxed{5}$ $\frac{\frac{1}{3}x^6+2}{3x-2}.$

13. $\boxed{6}$ $\frac{5x^3}{(x-4)^2}.$

14. $\boxed{6}$ $\frac{x^2+1}{x^3-x}.$

Найти производную функции (1 — 14).

1. $\boxed{3}$ $e^x + \sin x$.

2. $\boxed{3}$ $\cos x - \log_5 x$.

3. $\boxed{4}$ $x^6 \ln x$.

4. $\boxed{4}$ $\operatorname{tg} 3x$.

5. $\boxed{4}$ e^{5-3x}.

6. $\boxed{5}$ 3^{2x+1}.

7. $\boxed{5}$ $\ln(2-3x)$.

8. $\boxed{5}$ $\log_7(12x+5)$.

9. $\boxed{4}$ $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

10. $\boxed{4}$ $\cos(-6x+7)$.

11. $\boxed{5}$ $3e^{2x} - \sqrt{x}$.

12. $\boxed{6}$ $e^{1-x}x^8$.

13. $\boxed{6}$ $e^x(x^2 - 5x + 3)$.

14. $\boxed{7}$ $e^{2x}\sqrt{2x-3}$.

Применение производной в экономике

Пусть y(x) — затраты на изготовление x экземпляров некоторого продукта. Тогда y'(x) выражает скорость изменения затрат при изменении количества продукта. Эта производная называется **предельной (маржинальной**) стоимостью.

(Максимизация прибыли). Пусть функция дохода от количества реализованного товара x выражается формулой $R(x) = x^3/3 - 2000000\,x$, а функция затрат на производство товара формулой $C(x) = 1500\,x$. Определить оптимальный уровень производства и прибыль, которая при этом достигается.

(**Оптимизация налогообложения предприятий**). Пусть функция дохода от количества реализованного товара x выражается формулой $R(x) = 16\,x - x^2$, а функция затрат на производство товара— формулой $C(x) = x^2 + 1$. Определить оптимальный уровень налога с единицы реализованного товара и прибыль предприятия, которая при этом достигается.

Пусть y(t) — величина вклада в момент времени t (в годах). **Можно ли определить (приближенно) годовую ставку банковского процента p по функции y(t)?**

Если проценты начисляются непрерывно, то, где p — ежегодный процент прироста вклада, а $r = p/100$ — номинальная ставка за год. Найдем логарифмическую производную от величины вклада: **Вывод:** ставка банковского процента r совпадет с логарифмической производной от величины вклада.

Определение эластичности. Понятие эластичности было введено Альфредом Маршаллом в связи с анализом функции спроса. Впоследствии это понятие было распространено и на другие функции.

Физический смысл производной

Физический смысл производной. Производная характеризует скорость изменения одной физической величины по отношению к другой, считающейся независимой переменной

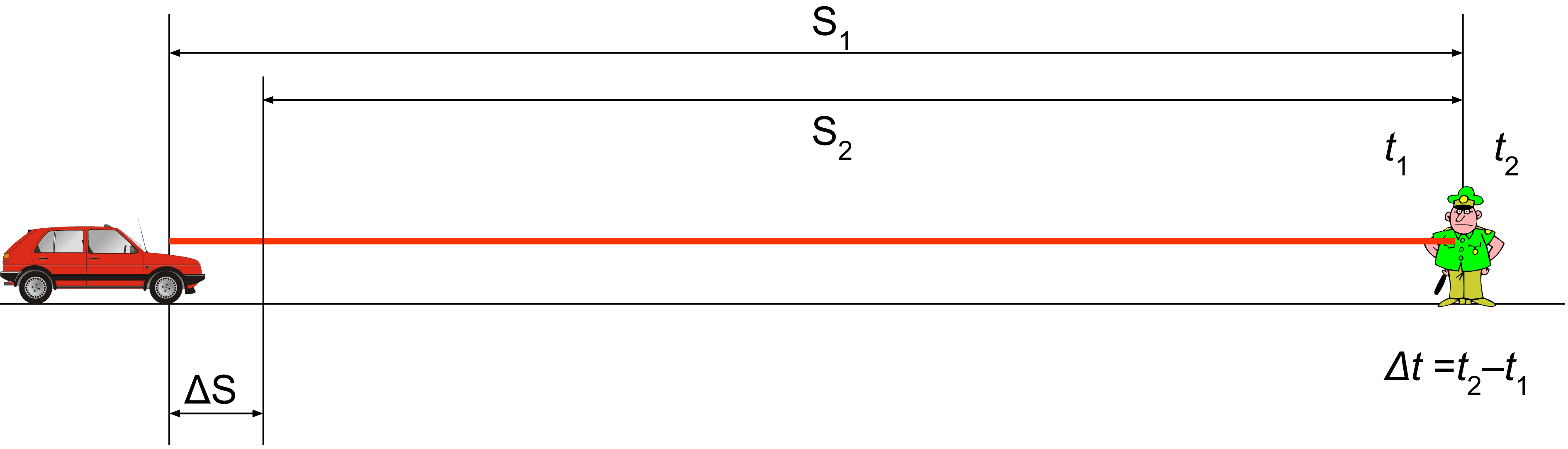
Механический смысл первой и второй производных. Скорость тела в момент времени t равна $x'(t)$, а ускорение равно $x''(t)$, где $x(t)$ – путь, пройденный телом к моменту времени

Средняя скорость тела за промежуток времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$ равна $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Мгновенная скорость тела в момент времени t_0 есть предел, к которому стремится его средняя скорость в промежуток времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$ при

$\Delta t \to 0,$

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v \quad = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t\ ).$$

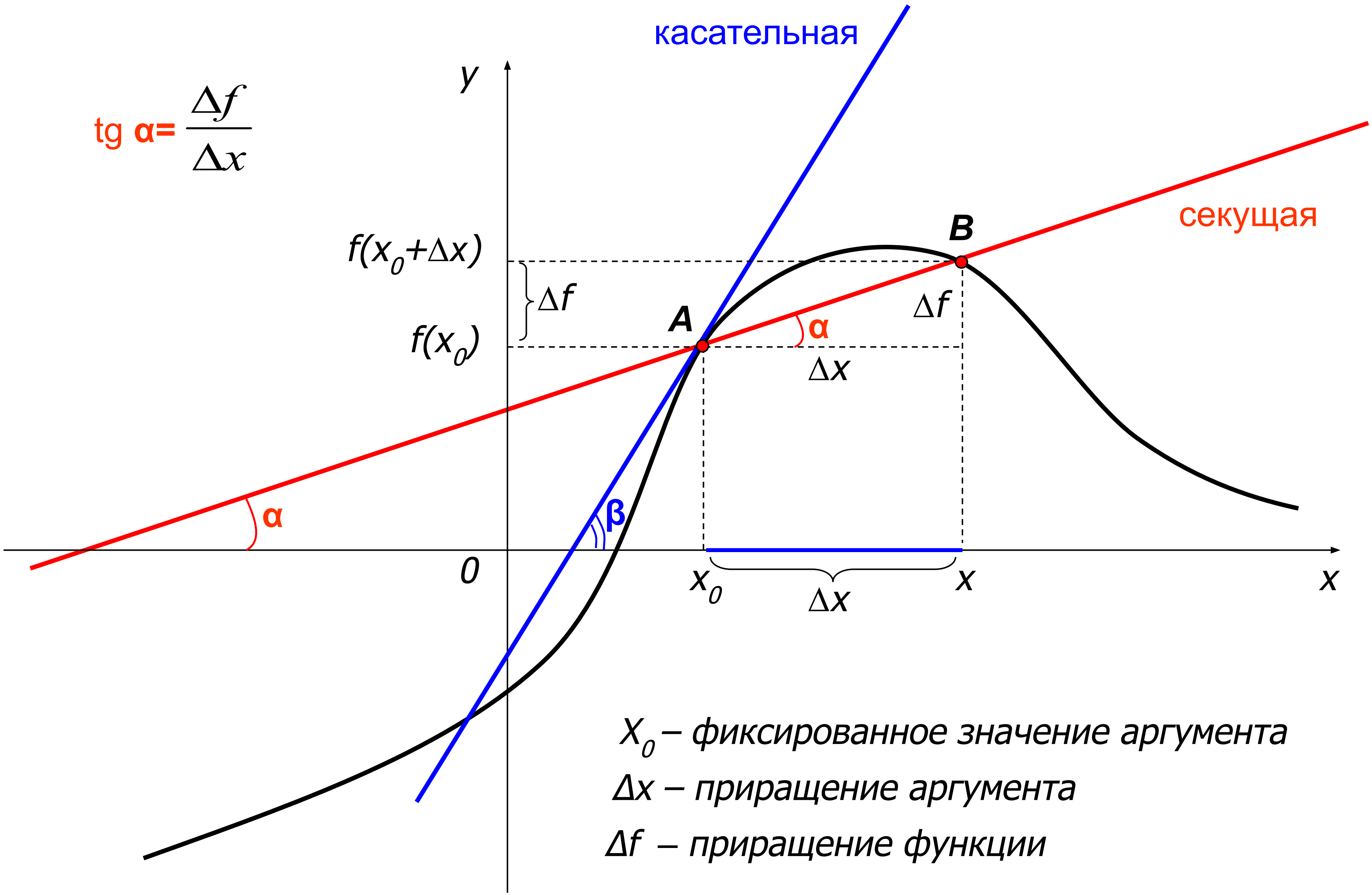


При $\Delta t \to 0$ $$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$ – **мгновенная скорость**

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = V$$

Пусть данная гладкая кривая – график функции $y = f(x)$

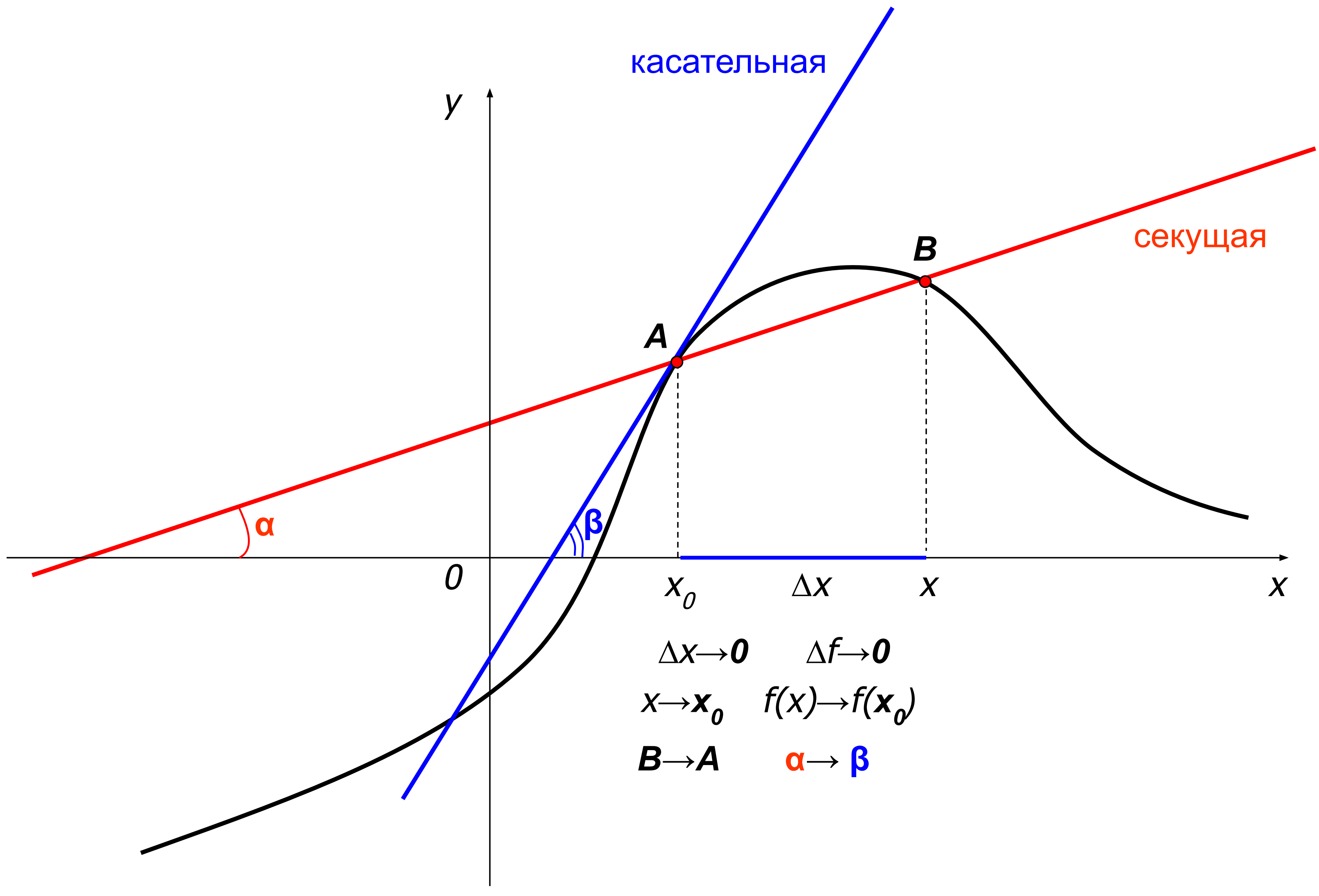
$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$



X_0 – фиксированное значение аргумента

Δx – приращение аргумента

Δf – приращение функции

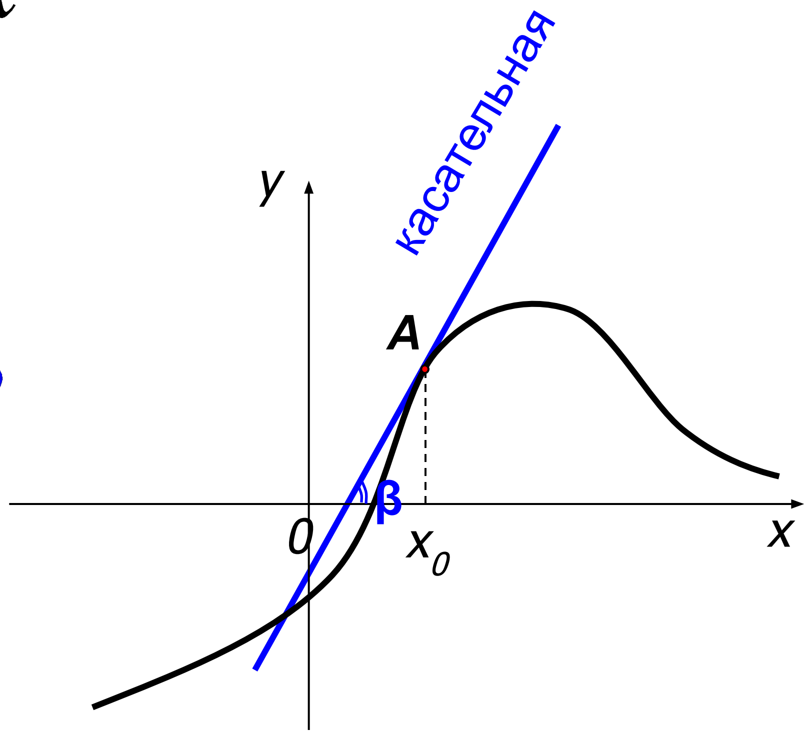

касательная
y
секущая
B
A
α
β
0
x0
Δx
x
x
Δx→0 Δf→0
x→x0 f(x)→f(x0)
B→A α→ β

Итак, ***по определению***, производной функции в любой точке из D(f) называется:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Геометрический смысл производной:

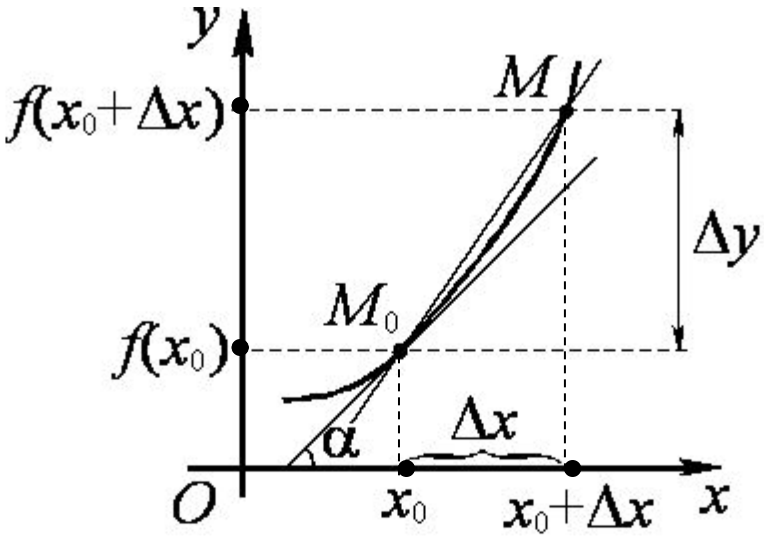
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=tg\,\beta$$



Физический смысл производной:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

– **мгновенная** скорость изменения функции.



Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной.

Производная функции в точке x_0, равна тангенсу угла наклона касательной к графику этой функции, проведенной в точке с абсциссой x_0

Касательная к графику функции $y = f(x)$ *в точке* $(x_0, f(x_0))$ – это прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $k = f'(x_0)$.

Уравнение этой прямой называется *общим уравнением касательной* и имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Касательную (в точке) можно также определить как предельное положение *секущей*