Ограниченно-детерминированные функции

Рассмотрим два конечных алфавита $A = \{a_1, \dots, a_\nu\}$ и $B = \{a_1, \dots, a_\mu\}$. Обозначим через A^∞ и B^∞ множества всех бесконечных последовательностей $\alpha = (\alpha(1), \alpha(2), \dots)$ и $\beta = (\beta(1), \beta(2), \dots)$ в алфавитах A и B соответственно. Рассмотрим функции $f(x)$, определенные на множестве бесконечных последовательностей α из A^∞ и принимающие на каждой из этих последовательностей значение β из B^∞; α и β называются входной и выходной последовательностями функции $f(x)$ соответственно. Таким образом, каждая функция $f(x)$ задает отображение $f : A^\infty \to B^\infty$.

Отметим, что среди этих функций есть такие, при вычислении значений которых возникают определенные трудности. Рассмотрим, например, следующую функцию.

Пусть $A = B = \{0,1\}$. Обозначим через $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$ бесконечные последовательности, состоящие из одних нулей и единиц соответственно. Пусть $f(\tilde{0}) = \tilde{0}$, $f(\alpha) = \tilde{1}$ для всех $\alpha \in A^\infty$, $\alpha \neq \tilde{0}$. Тогда значение первого разряда выходной последовательности функции f на последовательности $\tilde{0}$ нельзя найти, зная лишь конечное (каким бы большим оно ни было) число разрядов входной последовательности.

В связи с этим вводим следующее ограничение на рассматриваемые функции. Пусть $y = f(x)$, где

$$x = (x(1), x(2), \dots, x(t), \dots), \quad y = (y(1), y(2), \dots, y(t), \dots).$$

Функция f называется *детерминированной*, если для любого t, $t = 1, 2, \ldots$, значение $y(t)$ однозначно определяется первыми t членами входной последовательности $x(1), x(2), \ldots, x(t)$.

Иными словами, каждая детерминированная функция однозначно определяется бесконечной последовательностью функций

$$f_1(x(1)),\ f_2(x(1),x(2)),\ldots,\ f_t((1),x(2),\ldots,x(t)),\ldots,$$

где $f_t : A^t \to B,\ t = 1,2,\ldots$.

Пример. Пусть $A = B = \{0, 1\}$. Следующие функции $y = f(x)$, где $f : A^\infty \to B^\infty$, $x = (x(1), \ldots, x(t), \ldots)$, $y = (y(1), \ldots, y(t), \ldots)$, являются детерминированными:

a) $y(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } x(1) = x(2) = \cdots = x(t-1) = 0; \\ 1 \text{ в противном случае}; \end{cases}$

b) функция четности: $y(t) = x(1) \oplus x(2) \oplus \cdots \oplus x(t)$;

c) функция единичной задержки:

$$y(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t = 0; \\ x(t-1) \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

d) $$y(t) = \begin{cases} 0\,, \text{ если } t = 2^n \text{ для некоторого натурального } n; \\ 1 \ \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Детерминированные функции можно задавать при помощи информационных деревьев. *Информационное дерево в алфавитах* A и B представляет собой бесконечное ориентированное дерево, удовлетворяющее следующим условиям:

1) существует вершина v_0 — *корень* информационного дерева, в которую не входит ни одно ребро;
2) в каждую вершину, отличную от корневой, входит ровно одно ребро;
3) из каждой вершины дерева выходит $\nu = |A|$ ребер, которым приписаны пары (a_1, b_{i_1}), $(a_2, b_{i_2}), \ldots,$ (a_ν, b_{i_ν}), где $b_{i_1}, \ldots, b_{i_\nu} \in B$.

Таким образом, любая вершина дерева достижима из корневой и каждой выходящей из корня ориентированной цепи в информационном дереве соответствует пара последовательностей $\alpha \in A^\infty$ и $\beta \in B^\infty$, которые составлены из приписанных ребрам этой цепи букв алфавитов A и B соответственно.

Поэтому можно считать, что каждое информационное дерево T в алфавитах A и B задает вполне определенную детерминированную функцию $f_T(x)$; $f_T : A^\infty \to B^\infty$. Легко видеть, что верно и обратное. А именно для каждой детерминированной функции можно построить информационное дерево в алфавитах A и B, которое будет задавать функцию f.

На рис. 1 и 2 изображены начальные фрагменты информационных деревьев в алфавитах $A = \{0, 1\}$ и $B = \{0, 1\}$ для первой и второй функций из приведенного выше примера соответственно.

Возьмем в дереве T произвольную вершину v и рассмотрим бесконечное поддерево T_v дерева T с вершиной v в качестве корня, содержащее все вершины дерева T, достижимые из вершины v.

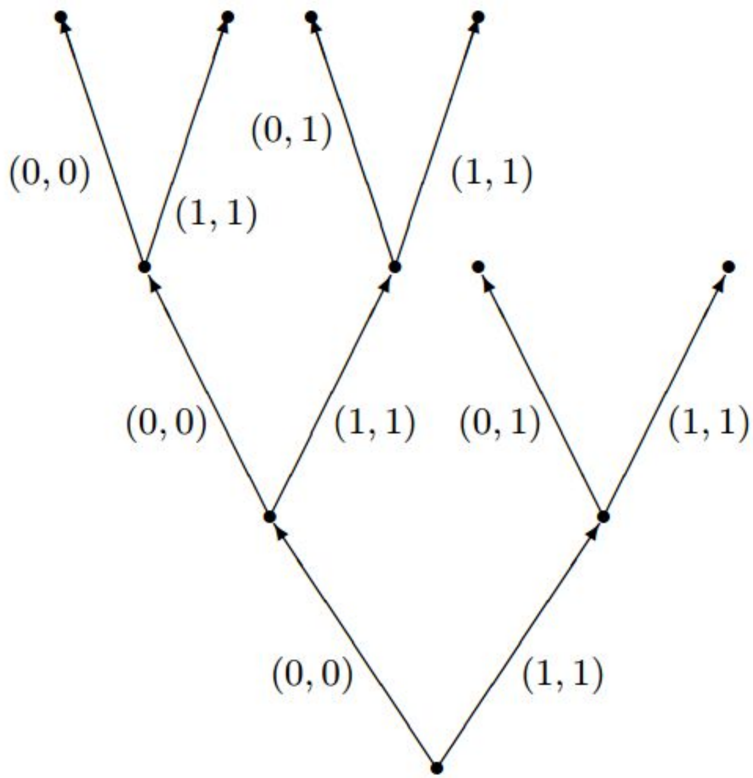

Рис. 1

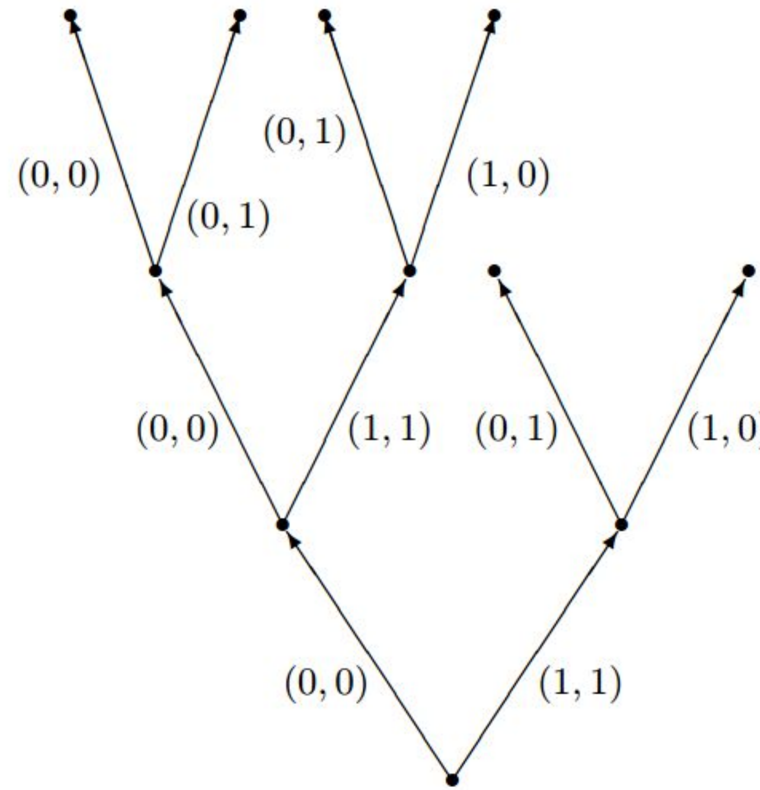

Рис. 2

Легко видеть, что T_v также будет являться информационным деревом в алфавитах A и B, задающим некоторую детерминированную функцию $f_{T_v}(x)$; $f_{T_v} : A^\infty \to B^\infty$.

Два информационных дерева T_1 и T_2 в алфавитах A и B называются *эквивалентными* (обозначение $T_1 \sim T_2$), если они задают одну и ту же детерминированную функцию (т. е. $f_{T_1}(x) = f_{T_2}(x)$). Иными словами, информационные деревья эквивалентны, если существует изоморфизм соответствующих бесконечных деревьев, сохраняющий пометки на ребрах.

Детерминированная функция $f(x)$ называется *ограниченно-детерминированной* (*о.-д. функцией*), если в информационном дереве, задающем функцию $f(x)$, содержится лишь конечное число попарно неэквивалентных информационных поддеревьев. Максимальное число попарно неэквивалентных поддеревьев в информационном дереве, задающем о.-д. функцию $f(x)$, называется *весом* функции f.

Пусть $f(x)$ — о.-д. функция веса r, T — информационное дерево, задающее f, v_0 — корень дерева T, а $v_0, v_1, \ldots, v_{r-1}$ — вершины дерева T, такие, что $T_{v_i} \not\sim T_{v_j}$ для всех $i, j = 0, 1, \ldots, r-1$, $i \neq j$. Занумеруем все вершины дерева T числами $0, 1, \ldots, r-1$ следующим образом:

1) вершины $v_0, v_1, \ldots, v_{r-1}$ нумеруются числами $0, 1, \ldots, r-1$ соответственно;
2) каждая вершина $v \notin \{v_0, v_1, \ldots, v_{r-1}\}$ нумеруется числом i, таким, что $T_v \sim T_{v_i}$, $0 \leqslant i \leqslant r-1$.

Номера $0, 1, \ldots, r-1$ вершин $v_0, v_1, \ldots, v_{r-1}$ в информационном дереве T называются *состояниями* функции f; множество $Q = \{0, 1, \ldots, r-1\}$ называется *множеством состояний* о.-д. функции f.

Вес функции четности из приведенного выше примера равен 2. На рис. 3 указан начальный фрагмент задающего эту функцию информационного дерева, у которого вершины занумерованы числами 0 и 1; для наглядности вершины дерева изображены в виде кружков, внутри которых помещены соответствующие номера.

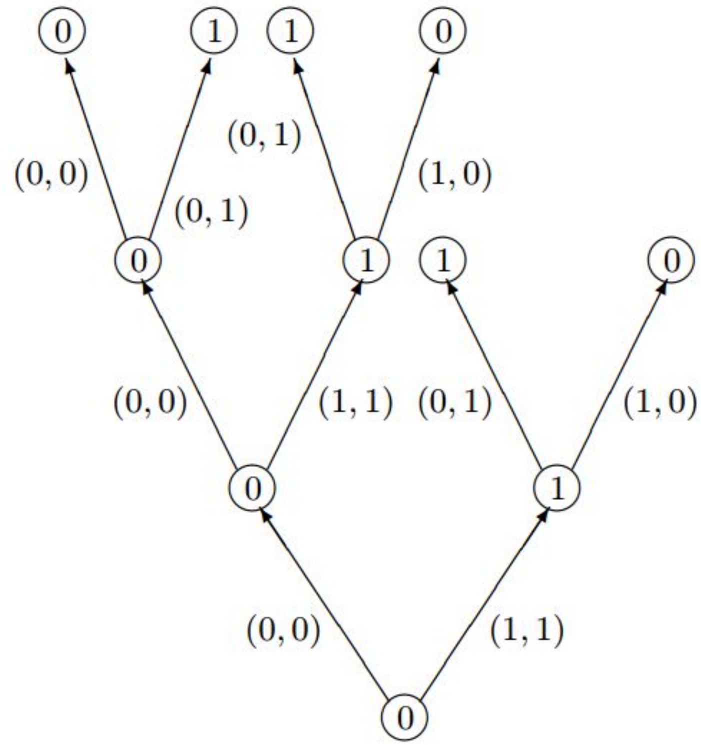

Рис. 3

Полученное информационное дерево T с занумерованными числами $0, 1, \ldots, r-1$ вершинами содержит избыточные сведения об исходной о.-д. функции f; вся необходимая информация содержится в r конечных фрагментах дерева, представленного на рис. 4, где $b_{i_1}, \ldots, b_{i_v} \in B$, а $j_1, j_2, \ldots, j_v \in Q$, $i = 0, 1, \ldots, r-1$.

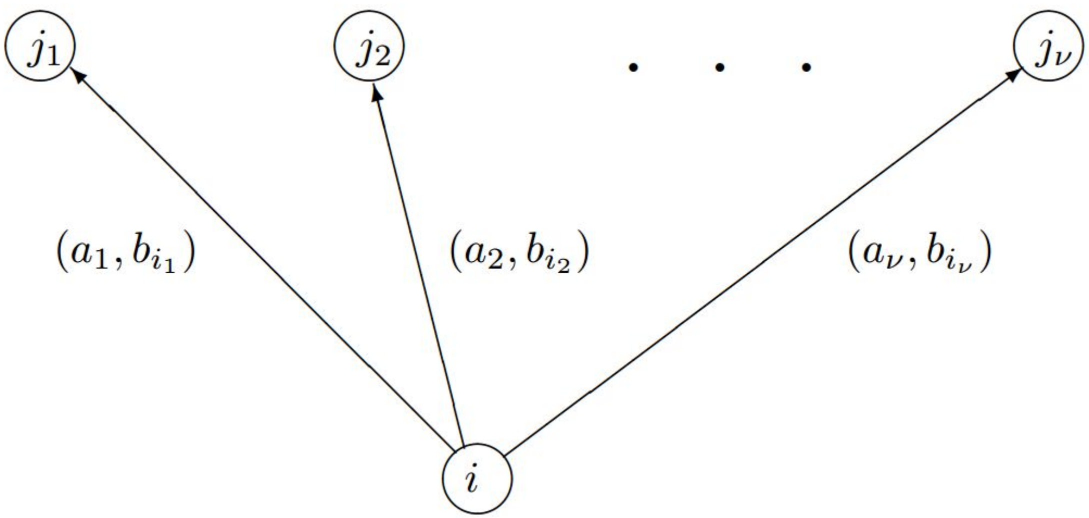

Рис. 4

На рис. 5 изображены соответствующие фрагменты для информационного дерева с занумерованными вершинами, изображенного на рис. 3.

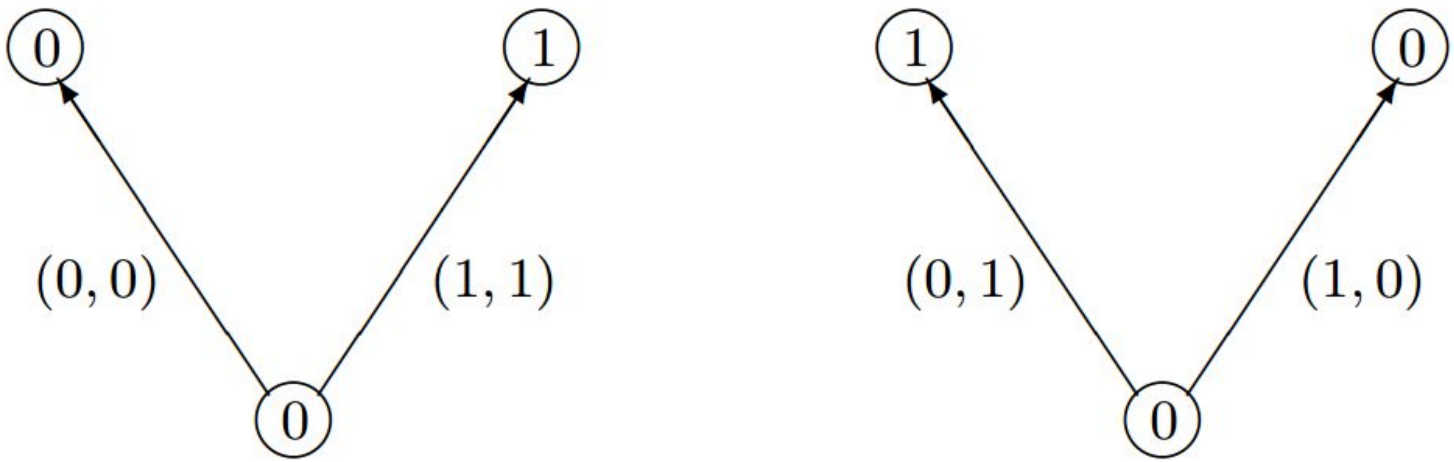

Рис. 5

Эта информация содержится также в усеченном дереве. *Усеченное дерево* представляет собой конечное ориентированное дерево, является подграфом дерева T с сохранением всех пометок на вершинах и ребрах, содержит корень v_0 дерева T и обладает следующим свойством: любая ориентированная цепь, выходящая из корня, содержит ровно две вершины с одинаковыми номерами, а никакое его собственное поддерево этим свойством не обладает.

Легко видеть, что усеченное дерево содержит все упомянутые выше фрагменты дерева T (см. рис. 4); при этом число ребер в любой ориентированной цепи этого дерева не превышает r. Таким образом, усеченное дерево содержит всю необходимую информацию для нахождения образа любой последовательности функции f.

На рис. 6 изображено усеченное дерево, построенное на основе информационного дерева рис. 3.

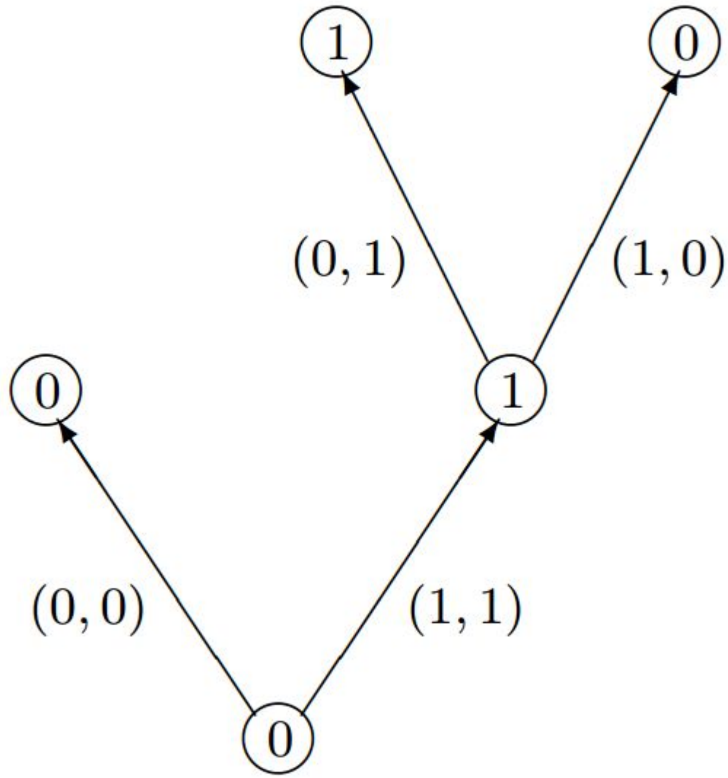

Рис. 6

Ограниченно-детерминированные функции удобно задавать *диаграммами переходов* (*диаграммы Мура*), которые получаются из усеченных деревьев отождествлением вершин с одинаковыми номерами.

В результате получаем конечный ориентированный граф с r вершинами, которые занумерованы числами $0, 1, \ldots, r-1$, и $v \cdot r$ ребрами; при этом из каждой вершины графа выходит v ребер, которым приписаны пары

$$(a_1, b_{i_2}), (a_2, b_{i_2}), \ldots, (a_\nu, b_{i_\nu}),$$

где $\{a_1, \ldots, a_\nu\} = A,\ b_{i_1}, \ldots, b_{i_\nu} \ \in \ B.$

Кроме того, вершина этого графа, соответствующая корню исходного информационного дерева T (при приведенном способе нумерации вершин она имеет номер 0), обычно помечается символом $*$.

На рис. 7 приведена диаграмма переходов для функции четности.

С диаграммами переходов можно связать две функции, F и G, $F : A \times Q \to B$ и $G : A \times Q \to Q$, которые называются функциями выходов и переходов соответственно. Значения этих функций для всех $a_i \in A$, $q_i \in Q$ находятся в соответствии с рис. 8.

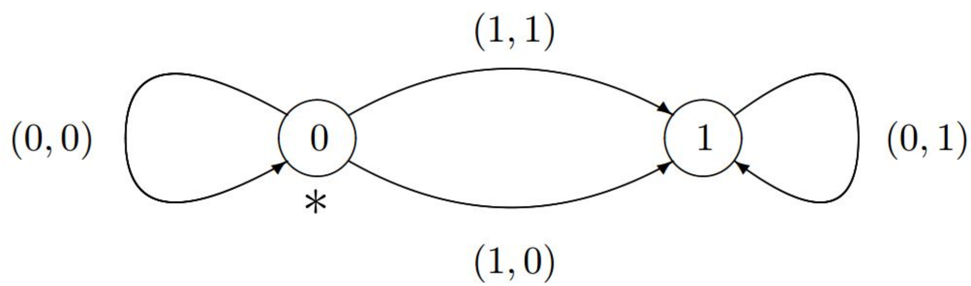

Рис. 7

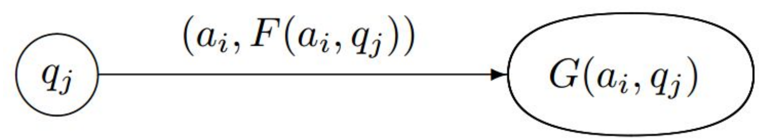

Рис. 8

В результате получаем способ задания о.-д. функций в виде таблиц, в $v \cdot r = |A| \cdot |Q|$ строках которых перечислены все пары (a_i, q_j) из $A \times Q$ и значения функций F и G на них (табл. 1).

Таблица 1

x	q	F	G
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_i	q_j	$F(a_i, q_j)$	$G(a_i, q_j)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Значения функций F и G для функции четности приведены в табл. 2.

Таблица 2

x	q	F	G
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

О.-д. функции можно задавать также при помощи уравнений:

$$\begin{cases} y(t) = F(x(t), q(t)); \\ q(t+1) = G(x(t), q(t)); \\ q(1) = q_0, \end{cases}$$

где $x(t) \in A$, $y(t) \in B$, $q(t) \in Q$ при всех $t = 1, 2, \ldots;$ q_0 — номер вершины в диаграмме переходов, которая отмечена символом $*$, $q_0 \in Q$. Эти уравнения называются *каноническими уравнениями* о.-д. функции f с начальным состоянием q_0.

Легко видеть, что по каноническим уравнениям, которые задают о.-д. функцию f, можно получить и все другие перечисленные выше способы задания этой функции.

Канонические уравнения для функций четности (a) и единичной задержки (b) имеют следующий вид:

(a)

$$\begin{cases} y(t) = x(t) + q(t); \\ q(t+1) = x(t) + q(t); \\ q(1) = 0; \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} y(t) = q(t); \\ q(t+1) = x(t); \\ q(1) = 0. \end{cases}$$