Система m линейных уравнений с n неизвестными

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

Любые m переменных системы m линейных уравнений с n переменными ($m<n$) называются **основными** (или **базисными**), если определитель матрицы коэффициентов при них отличен от нуля.

Тогда остальные $n - m$ переменных называются **неосновными** (или **свободными**)

Базисным решением системы m линейных уравнений с n переменными называется решение, в котором все n-m неосновных переменных равны нулю.

В задачах линейного программирования особый интерес представляют допустимые базисные решения (опорные планы).

Число базисных решений является конечным.

Базисное решение, в котором хотя бы одна из основных переменных равна нулю, называется вырожденным.

Геометрический метод решения задач линейного программирования

Решение неравенств

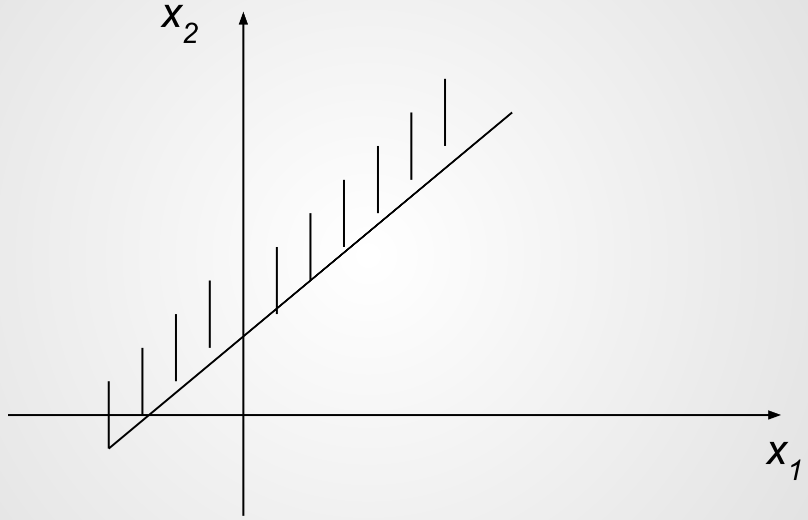
Множеством решений неравенства

$$a_1x_1 + a_2x_2 \le b_1$$

с двумя переменными является одна из полуплоскостей, на которые вся плоскость делится прямой ,

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b_1$$

включая и эту прямую


x2
x1

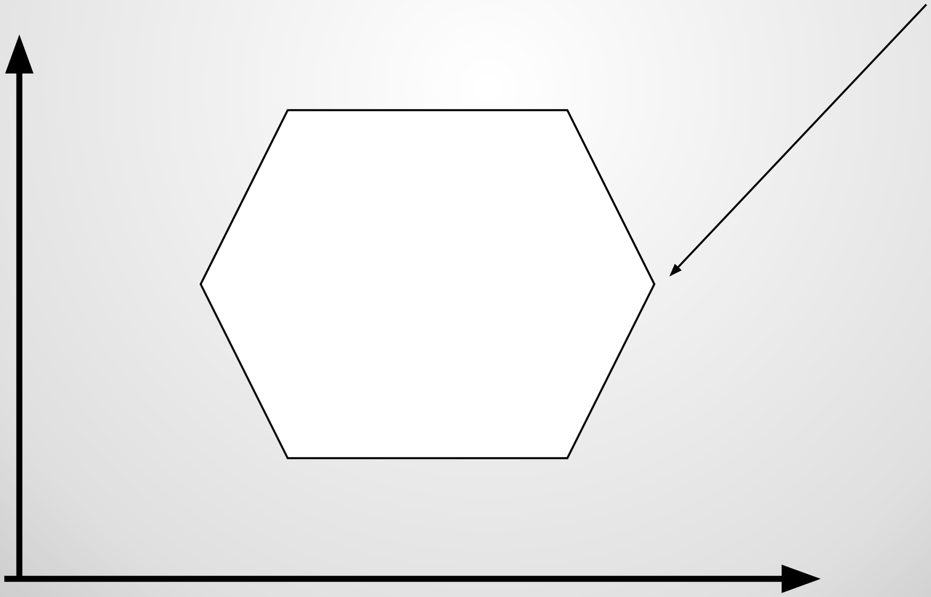
Множеством решений совместной системы m линейных неравенств с двумя переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases}$$

является выпуклый многоугольник (или выпуклая многоугольная область)

Множество всех допустимых решений совместной системы m линейных уравнений с n переменными (m<n) является выпуклым многогранником в n- мерном пространстве.

Угловая точка



Сформулированные теоремы и понятия позволяют сделать следующие выводы.

Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное или минимальное значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многогранника решений (в одной из угловых точек).

Если максимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Для определения этой вершины необходимо построить линию уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ (где h – некоторая постоянная), проходящую через многоугольник решений, и будем передвигать ее в направлении вектора

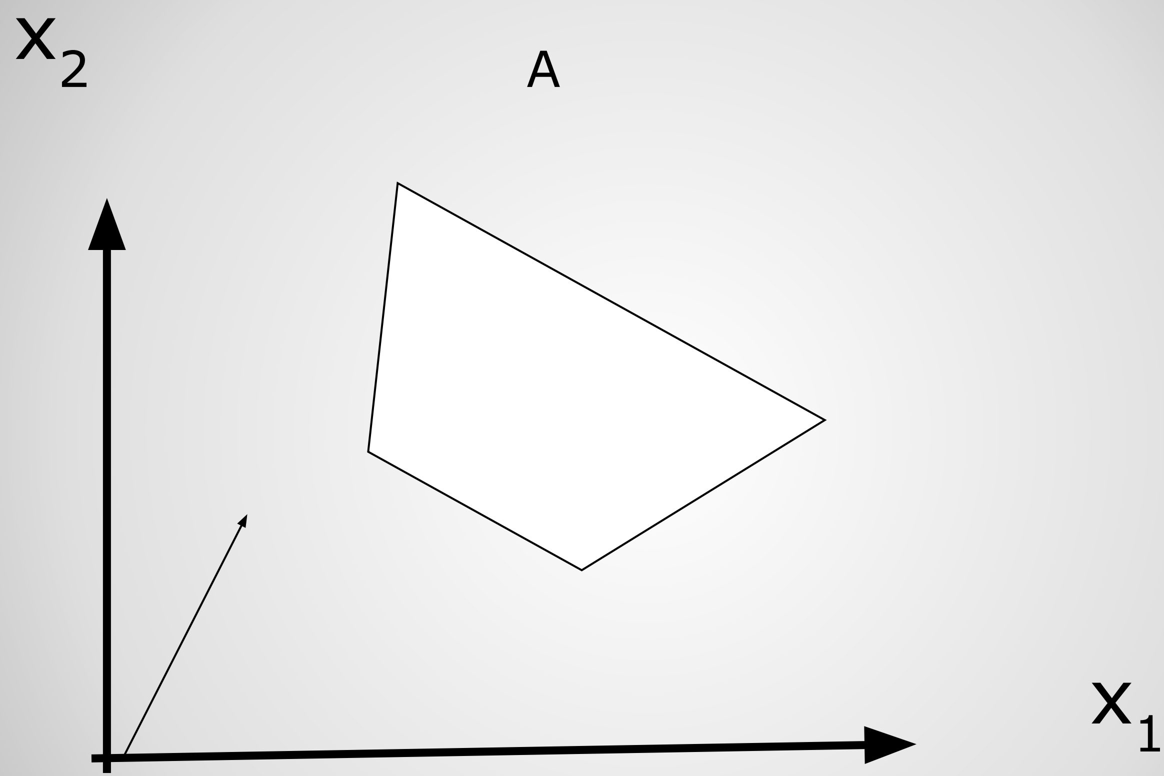
$d = (c_1;c_2)$,

до тех пор, пока она не пройдет через ее последнюю общую точку с многоугольником решений.

Координаты указанной точки и определяют оптимальный план данной задачи.

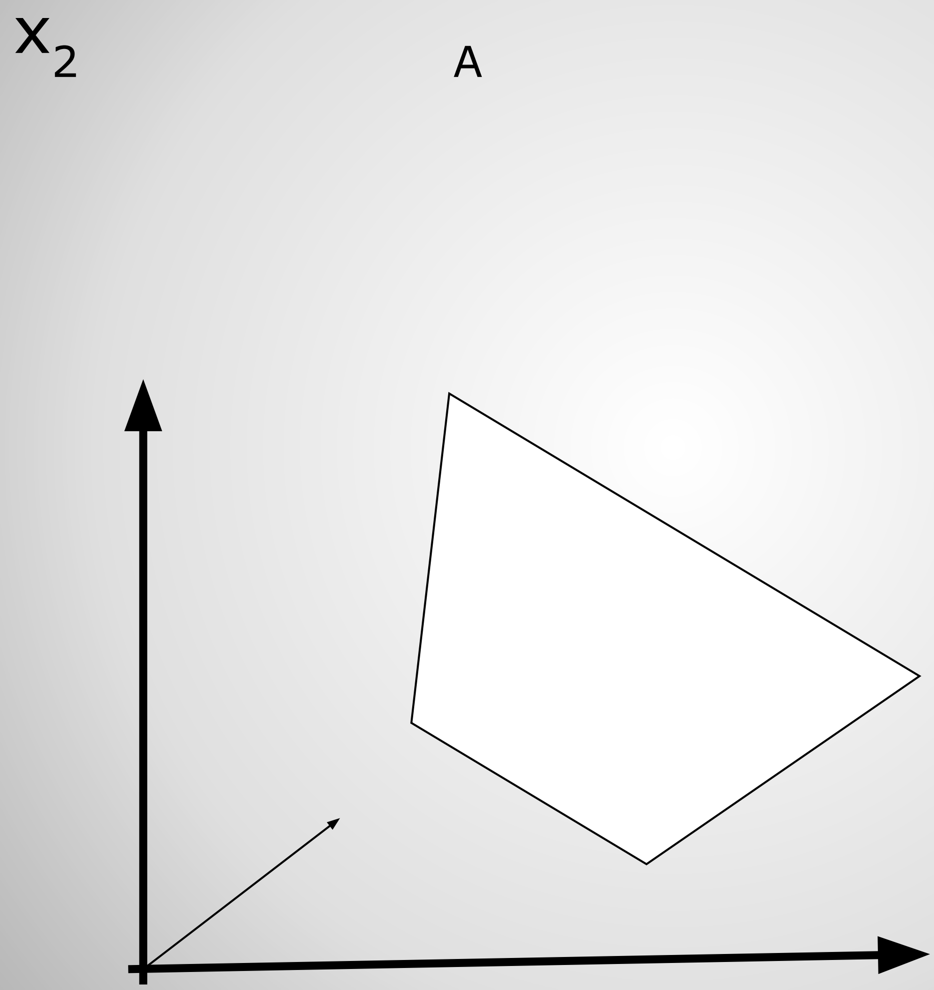
Заканчивая рассмотрение геометрической интерпретации задачи , отметим, что при нахождении ее решения могут встретиться случаи, изображенные на рис. 1 - 4.

Рис. 1 характеризует такой случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке *А.*

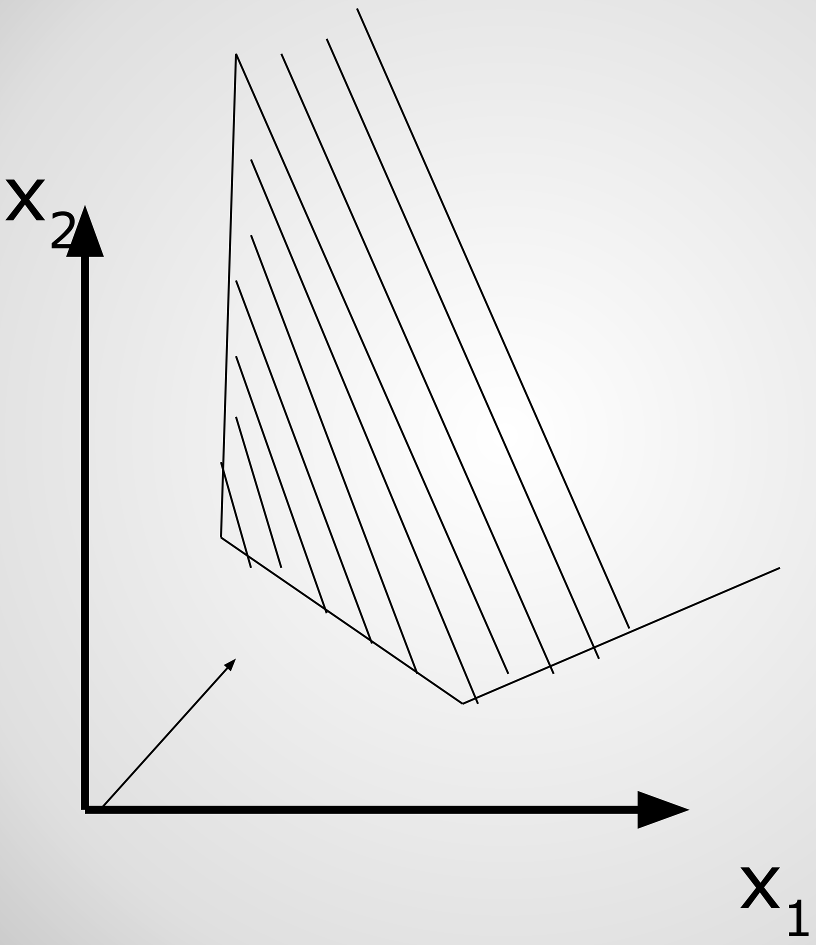

x2
A
x1

Из рис. 2 видно, что максимальное значение целевая функция принимает в любой точке отрезка *АВ.*

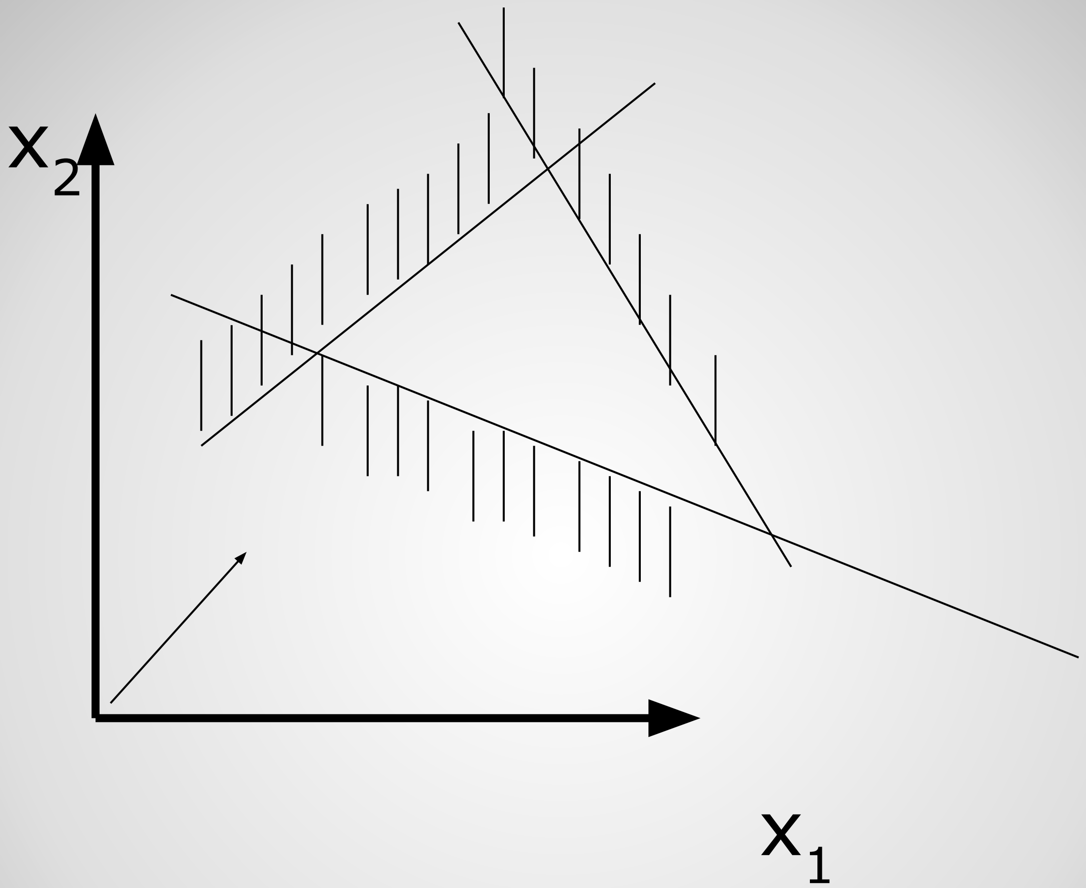
На рис. 3 изображен случай, когда целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых решений, а на рис. 4 – случай, когда система ограничений задачи несовместна.



x2
A
B
x1



x_2
x_1


x_2
x_1

Таким образом, отмеченные выше случаи, встречающиеся при нахождении максимального значения целевой функции, имеют место и при определении ее минимального значения.

Итак, нахождение решения задачи линейного программирования на основе ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.
3. Находят многоугольник решений.

4. Строят вектор целевой функции $d(c_1;c_2)$,.

5. Строят прямую $c_1x_1+ c_2x_2=h$,

проходящую через многоугольник решений.

6. Передвигают прямую в направлении вектора , в результате чего - или находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение, или устанавливают неограниченность сверху (снизу) функции на множестве планов.

7. Определяют координаты точки максимума (минимума) функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют 4 вида ресурсов S_1 , S_2 , S_3 и S_4 .

Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в таблице (цифры условные).

Вид ресурса	Запас ресурса	Число ед. ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5		1
S_4	21	3	

Прибыль, полученная от единицы продукции P_1 и P_2 , - соответственно 2 и 3 руб.

Необходимо составить план производства, при котором прибыль от реализации будет максимальной.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 21 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

Найдем решение сформулированной задачи, используя ее геометрическую интерпретацию.

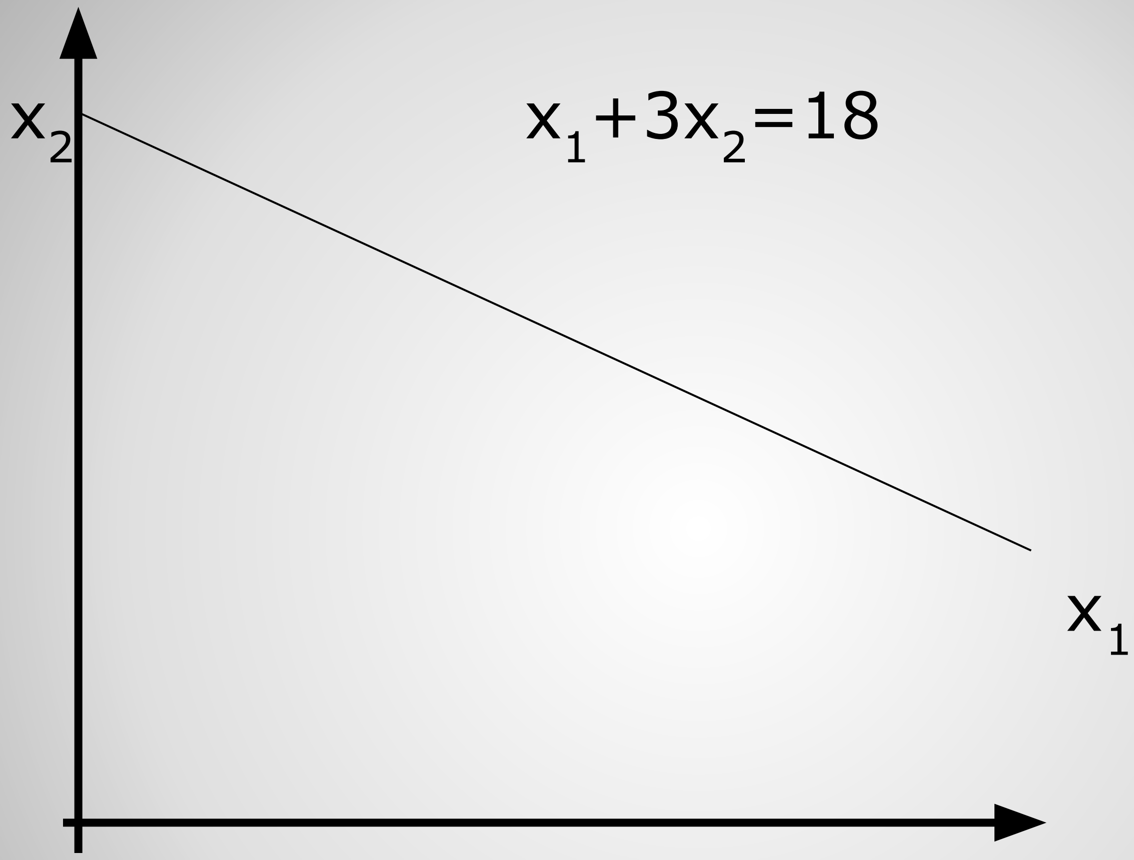
Сначала построим многоугольник решений (область допустимых решений)

Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств и найдем соответствующие прямые:

$$
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 = 18 \\
2x_1 + x_2 = 16 \\
x_2 = 5 \\
3x_1 = 21 \\
x_1 = 0 \\
x_2 = 0
\end{cases}
$$

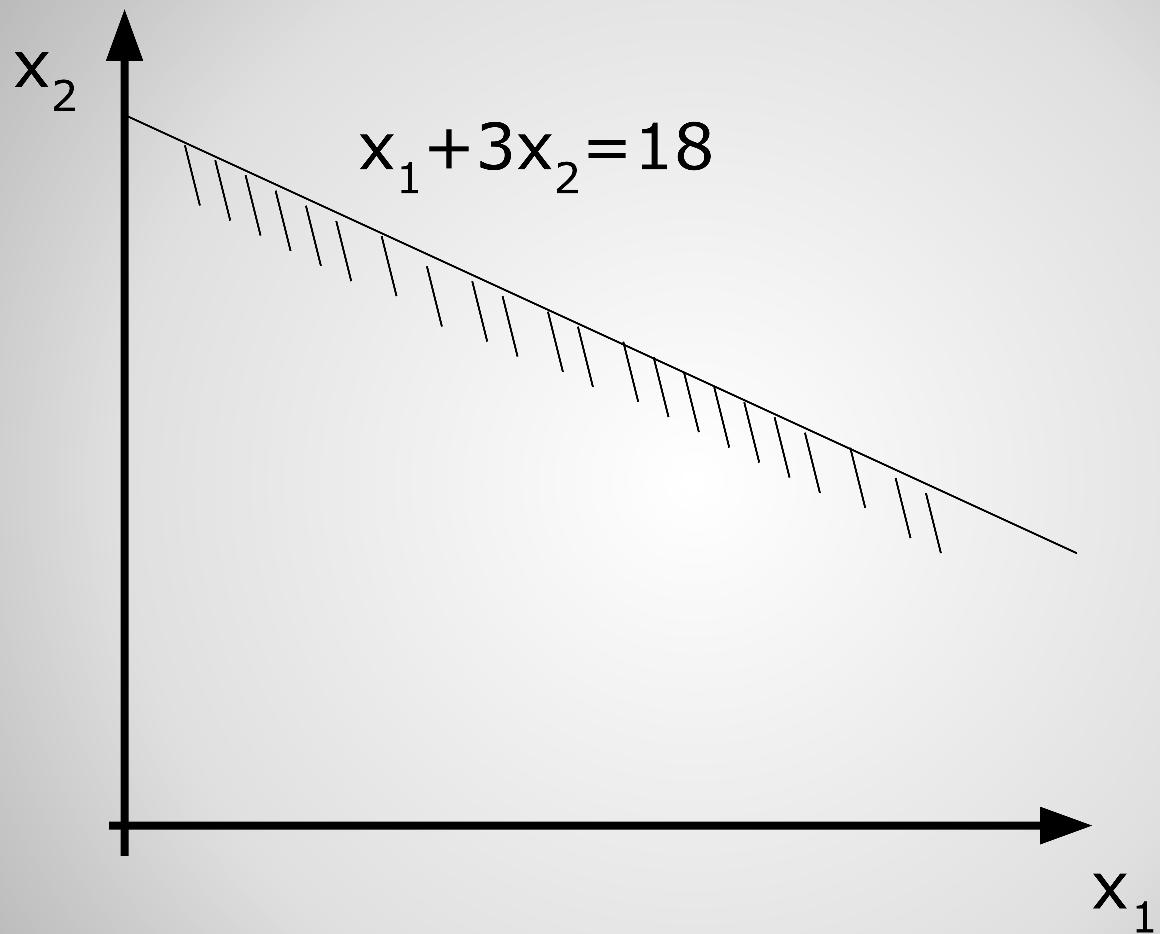
$$X_1+3x_2=18$$

X_1	0	3
x_2	6	5


x_2
$x_1+3x_2=18$
x_1

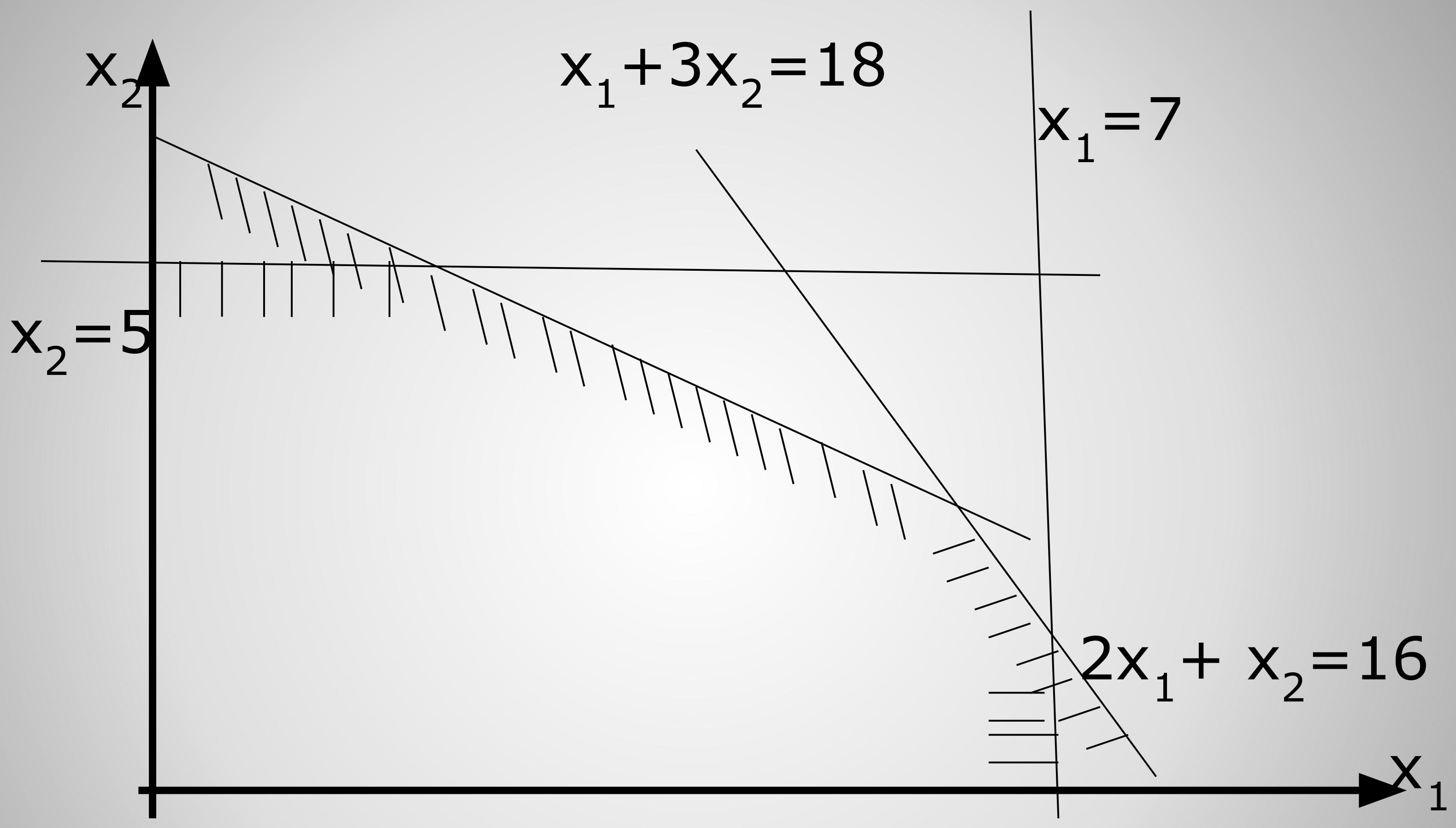
Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству.

Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае – другая полуплоскость.

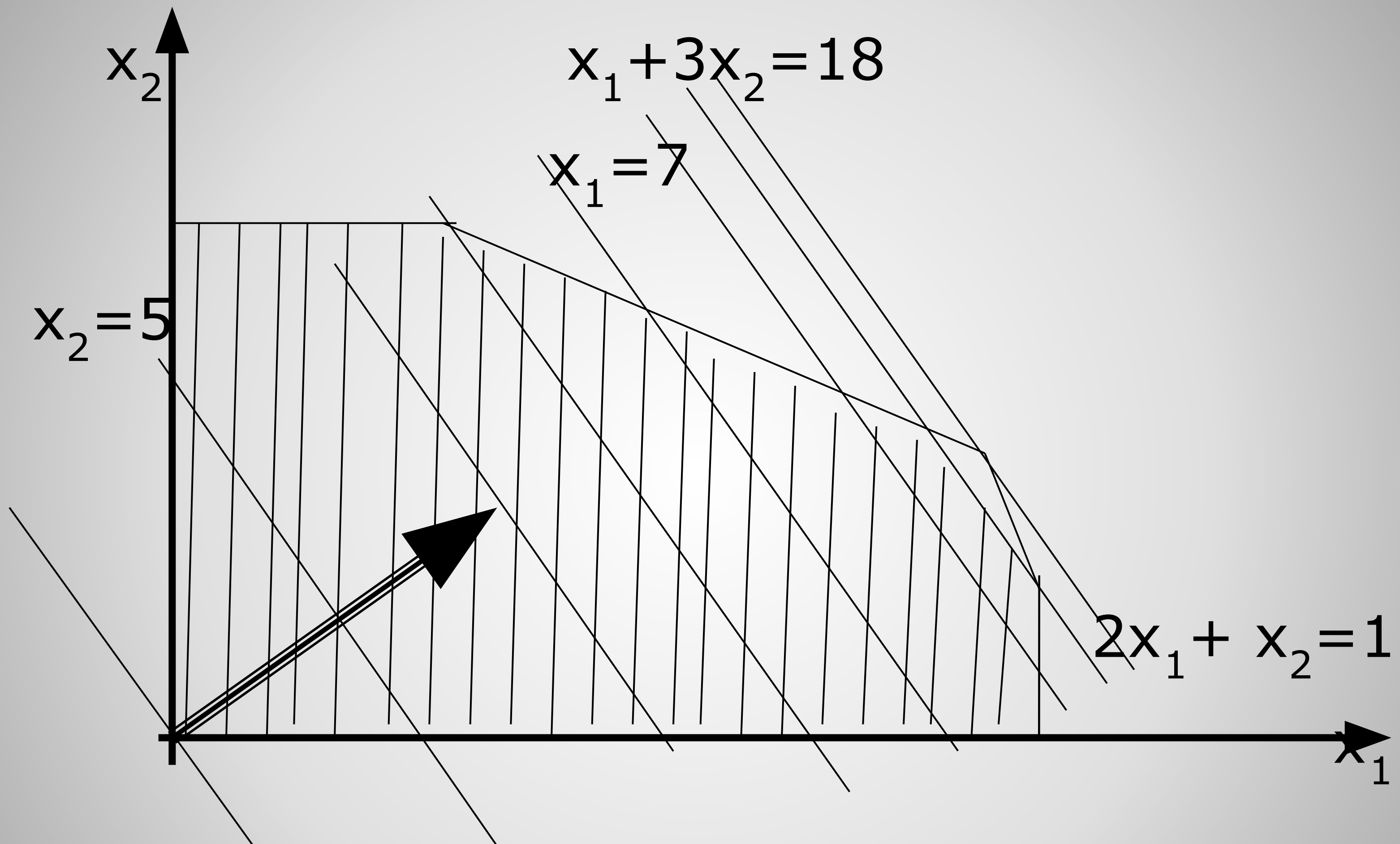


x_2
$x_1+3x_2=18$
x_1

В результате получим:



x_2
$x_1+3x_2=18$
$x_1=7$
$x_2=5$
$2x_1+ x_2=16$
x_1


x2
x1+3x2=18
x1=7
x2=5
2x1+ x2=16
x1

$$\begin{cases} x_1+3x_2=18 \\ 2x_1+x_2=16 \end{cases}$$

$$x_1=18-3x_2$$

$$2(18-3x_2)+x_2=16$$

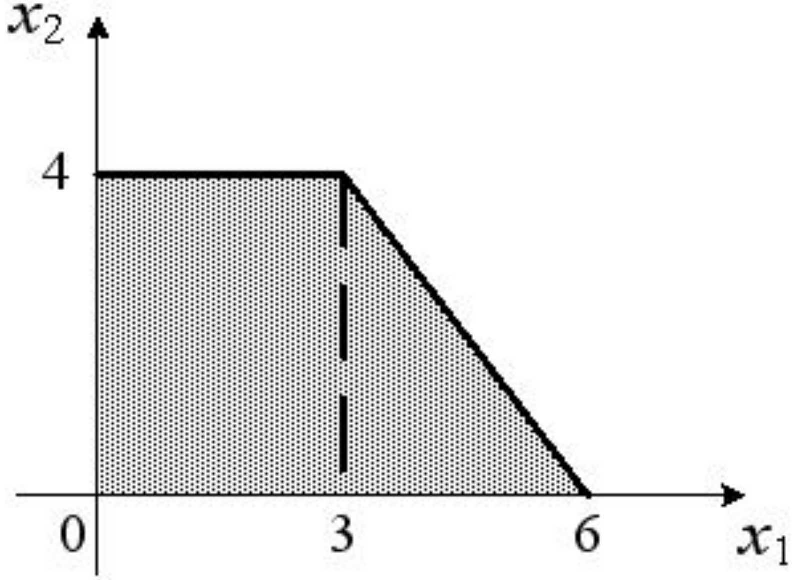
$$-5x_2=-20$$

$$x_2=4$$

$$x_1= 6$$

$$F=2*6+3*4=24$$

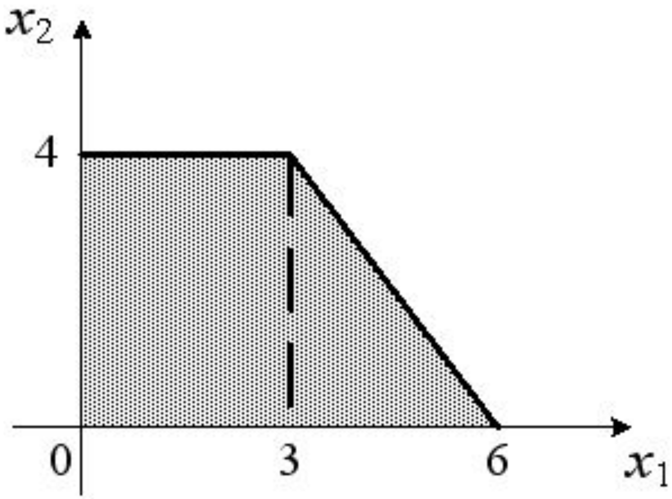
Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид:



Тогда максимальное значение функции

$$z = 3x_1 + 3x_2$$

Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид



Тогда максимальное значение функции $z = 3x_1 + 5x_2$ равно…

Максимальное значение целевой функции

$$z = x_1 + 2x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

равно…

Максимальное значение целевой функции

$$z = 3x_1 + x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

равно…

Максимальное значение целевой функции

$$z = 6x_1 + x_2$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \le 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases}$$

равно…