ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА.

Момент инерции.

Момент инерции – это скалярная физическая величина, характеризующая инертные свойства тела при вращательном движении.

Моментом инерции материальной точки относительно заданной оси вращения называется произведение массы этой точки на квадрат расстояния её от оси вращения:

$$J = m \cdot r^2 .$$

Любое тело состоит из множества точек. *Моментом инерции тела* относительно заданной оси вращения называется сумма моментов инерций всех его точек относительно этой оси:

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \cdot r_i^2 ,$$

где Δm_i – масса, заключенная в элементарном объеме ΔV_i;

r_i – расстояние элементарной массы от оси вращения.

Но $\Delta m_i = \rho_i \cdot \Delta V_i$, где ρ_i – плотность тела в данной точке.

$$J = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \cdot r_i^2 \cdot \Delta V_i \ .$$

Эти соотношения являются приближенными, причем тем более точными, чем меньше элементарные объемы ΔV_i и соответствующие им массы Δm_i.

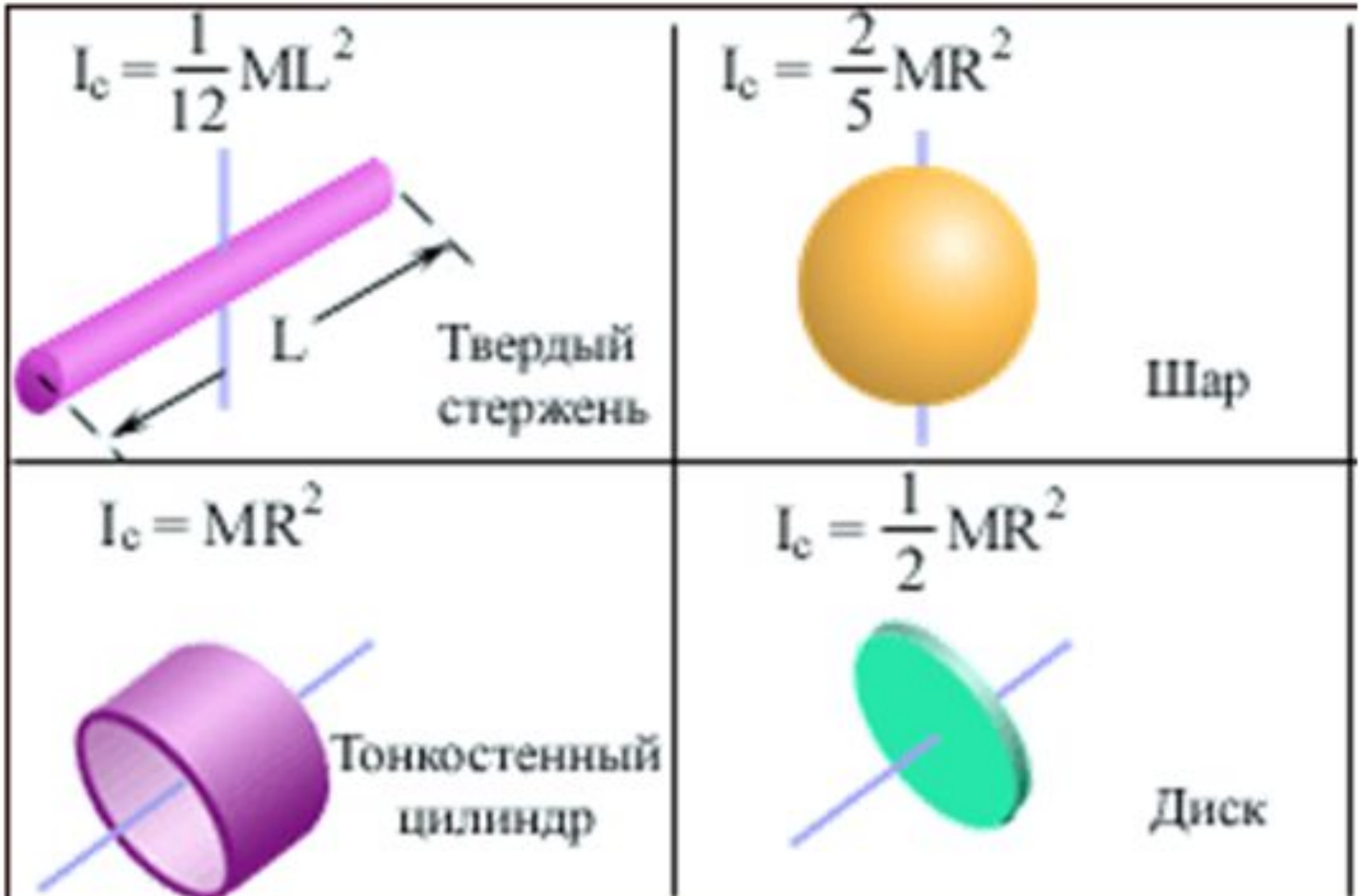
Следовательно, точное вычисление момента инерции тела сводится к интегрированию:

$$J = \int r^2 \cdot dm = \int \rho \cdot r^2 \cdot dV \ .$$

Момент инерции тела, имеющего правильную геометрическую форму, может быть довольно просто рассчитан аналитически. В качестве примера найдем момент инерции однородного цилиндра относительно оси, совпадающей с осью его симметрии.

Радиус-вектор центра масс любого тела $\vec{r}_C = \dfrac{\int_V \rho \cdot \vec{r} \cdot dV}{m}$ $\qquad \vec{r}_C = \dfrac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$

Моменты инерции некоторых тел:



Теорема Штейнера

Момент инерции J_0 относительно произвольной оси равен сумме момента инерции J_C относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями.

$$J_0 = J_c + md^2 .$$

Таким образом, момент инерции тела зависит от его формы, размеров, плотности, расположения оси вращения. Момент инерции не зависит от характера движения тела.

Момент силы.

Вращательное действие силы – сообщение телу углового ускорения – зависит не только от модуля и направления силы, но и от того, к какой точке тела она приложена. Величиной, которая учитывает все эти факторы, является *момент силы.*

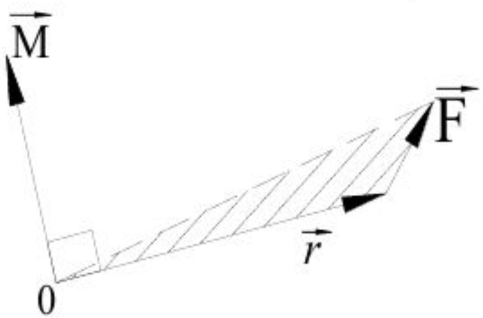


Рисунок 2.

Различают несколько отличающихся друг от друга понятий момента силы:

а) *Момент силы относительно некоторой точки О.*

Моментом силы относительно некоторой точки О называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки О в точку приложения силы, на вектор силы $\vec{F}$ (рис. 2).

Момент силы.

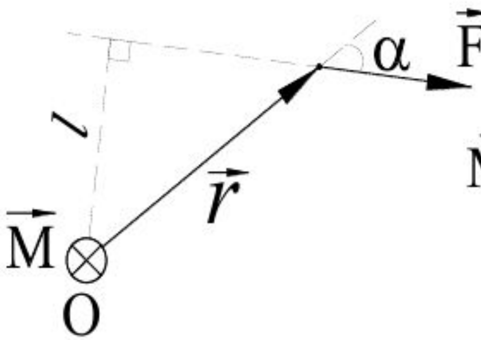


Рисунок 3.

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right].$$

Рисунок 3 показывает взаимное расположение векторов, если смотреть вдоль вектора момента силы $\vec{M}$. Здесь и на последующих рисунках значком $\otimes$ обозначено направление вектора «от нас». Видно, что модуль момента силы равен $M = rF\sin\alpha = Fl$, где l – длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию действия силы, называется *плечом силы.*

Момент силы.

б) *Момент силы относительно некоторой оси Z.*

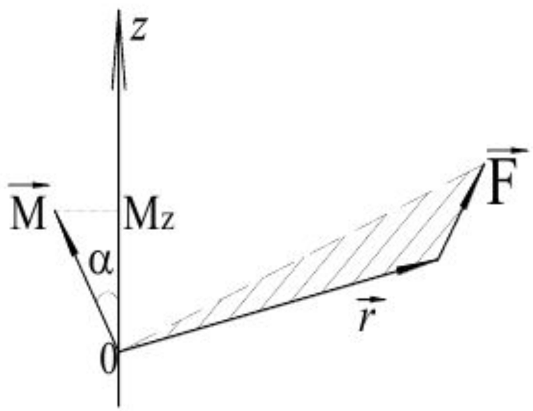


Рисунок 4.

Моментом силы относительно некоторой оси Z называется проекция момента силы относительно любой точки, взятой на данной оси, на эту ось Z:

$$M_z = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]_z \ .$$

Таким образом, момент силы относительно оси – величина скалярная, он не имеет направления, но может быть положительным или отрицательным в зависимости от величины угла α (рис. 4).

Момент импульса

Одной из важнейших физических величин является момент импульса. При этом, как и в случае момента силы, различают момент импульса относительно точки и относительно оси. Дадим вначале определение момента импульса материальной точки.

а) *Момент импульса материальной точки относительно точки О.*

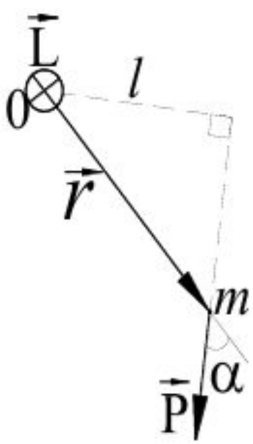


Рисунок 6.

Моментом импульса материальной точки относительно некоторой точки О называется векторное произведение радиус-вектора, проведенного из точки О к данной материальной точке, на вектор импульса этой материальной точки (рис. 6).

$$\vec{L} = \left[\vec{r}, \vec{P}\right] = \left[\vec{r}, m\vec{v}\right]$$

Наибольший интерес вызывают при этом два часто встречающихся на практике случая движения материальной точки:

Момент импульса

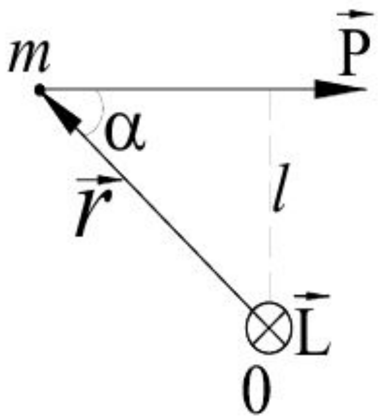


Рисунок 7.

1) движение материальной точки по прямолинейной траектории (рис. 7);

На приведенном рисунке вектор момента импульса направлен от нас, а его модуль равен

$L = m \cdot v \cdot r \cdot \sin\alpha = m \cdot v \cdot l$. Расстояние l, то есть длина перпендикуляра, опущенного из точки О на линию вектора импульса материальной точки, называется *прицельным параметром.*

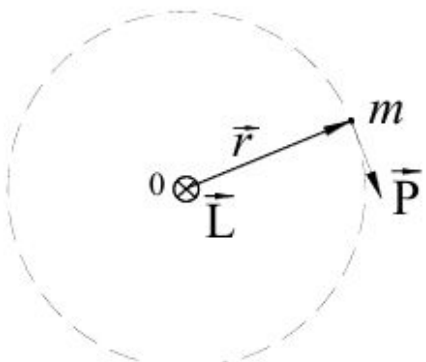


Рисунок 8.

2) движение материальной точки по окружности (рис. 8).

В данном случае угол между радиус-вектором $\vec{r}$ материальной точки и импульсом этой точки $\vec{P}$ равен 90^o, поэтому модуль момента импульса равен

$L = m \cdot v \cdot r$, где r – радиус окружности, по которой происходит движение.

Момент импульса

б) *Момент импульса материальной точки относительно некоторой оси Z.*

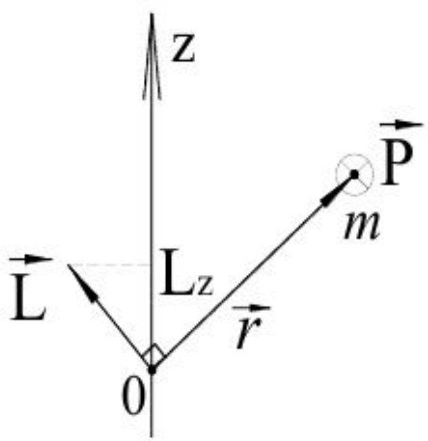


Рисунок 9.

Моментом импульса материальной точки относительно произвольной оси Z называется проекция вектора момента импульса этой материальной точки относительно любой точки О, выбранной на оси Z, на данную ось (рис. 9):

$$L_z = \left[\vec{r}, \vec{P}\right]_z$$

Теперь перейдем к рассмотрению понятия момента импульса твердого тела.

Момент импульса

в) *Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси вращения.*

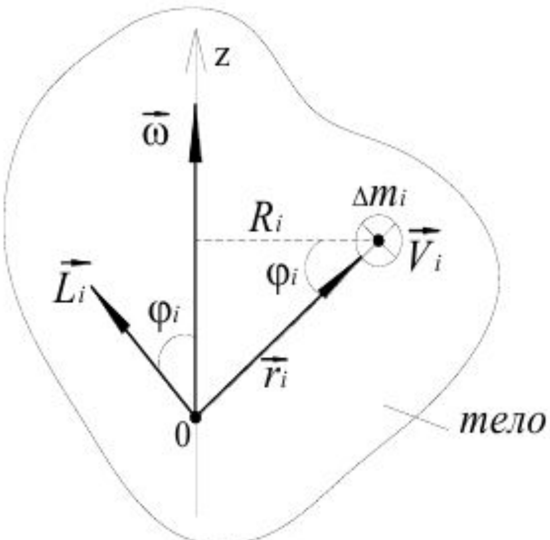


Рисунок 10.

Момент импульса твердого тела равен сумме моментов импульсов всех материальных точек, из которых состоит тело.

Выберем на оси Z произвольную точку О. Разобьем тело на материальные точки. На рисунке 10 показана одна из таких точек, имеющая массу Δm_i, движущаяся от нас со скоростью $\vec{v}_i$. Момент импульса этой материальной точки относительно точки О равен

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i, \vec{P}_i\right] = \Delta m_i \left[\vec{r}_i, \vec{v}_i\right].$$

Момент импульса

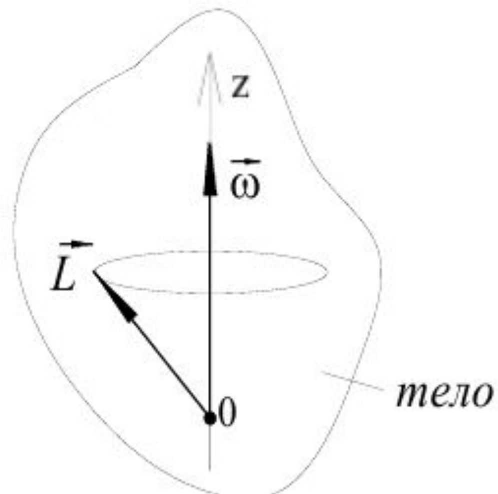


Рисунок 11.

Тогда момент импульса всего тела относительно точки О будет равен:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \left[\vec{r}_i, \vec{v}_i \right].$$

Заметим, что в общем случае для несимметричного тела вектор момента импульса тела относительно точки О не направлен вдоль оси вращения тела и при вращении описывает вокруг оси Z коническую поверхность (рис. 11).

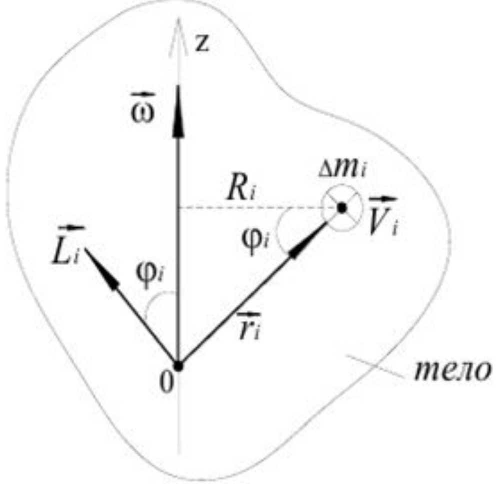


Рисунок 10.

Момент импульса

Найдем теперь момент импульса тела относительно оси вращения Z. Вначале запишем выражение для момента импульса отдельной материальной точки относительно оси Z.

$$L_{zi} = L_i \cos\varphi_i = \Delta m_i \cdot v_i \cdot r_i \cdot \cos\varphi_i = \Delta m_i \cdot v_i \cdot R_i .$$

Учтем взаимосвязь модулей угловой и линейной скоростей материальной точки:

$v_i = \omega R_i$. Тогда $L_{zi} = \omega \Delta m_i R_i^2$.

Момент импульса тела относительно оси равен сумме моментов импульсов всех точек этого тела относительно этой оси:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{zi} = \omega \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_i^2 .$$

Момент импульса

Таким образом, момент импульса тела относительно оси не зависит от выбора положения точки О.

Видно, что сумма в последнем равенстве представляет собой момент инерции тела относительно оси Z. Тогда выражение для момента импульса тела относительно оси принимает окончательный вид:

$$L_z = J\omega .$$

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Выясним, от чего зависит изменение момента импульса материальной точки. Для этого возьмем производную от вектора момента импульса по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\vec{r},m\vec{v}\right]=\left[\vec{r},m\frac{d\vec{v}}{dt}\right]+\left[\frac{d\vec{r}}{dt},m\vec{v}\right]=\left[\vec{r},m\vec{a}\right]+\left[\vec{v},m\vec{v}\right]=\left[\vec{r},\vec{F}\right]=\vec{M}.$$

Таким образом, скорость изменения момента импульса материальной точки равна моменту сил, действующих на эту точку. Подобное утверждение справедливо и для момента импульса материальной точки относительно некоторой оси Z:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M} \qquad \text{и} \qquad \frac{dL_z}{dt}=M_z\ .$$

Полученные равенства можно назвать законом изменения момента импульса материальной точки.

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела

Тогда для всего тела в целом имеем равенство $\frac{dL_z}{dt} = M_{z\ внеш.}$

$L_z = J\omega$. Тогда, учитывая, что момент инерции абсолютно твердого тела – постоянная величина, получим:

$$J\varepsilon_z = M_{z\ внеш.}.$$

Последнее равенство и представляет собой основной закон динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Его можно записать и для модулей входящих в него величин: $\varepsilon = \frac{M_{внеш.}}{J}$.

В этом виде основной закон динамики вращательного движения имеет формулировку: ***Модуль углового ускорения тела прямо пропорционален модулю суммарного момента внешних сил, приложенных к телу и обратно пропорционален моменту инерции тела.***

Закон сохранения момента импульса

Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы тел сохраняется:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,\ \vec{L} = \mathrm{const},\ \text{если}\ \vec{M}_{\text{внешн.}} = 0.$$

Если результирующий момент внешних сил не равен нулю, но равна нулю его проекция на некоторую ось, то проекция момента импульса системы на эту ось не изменяется.

Из законов динамики поступательного и вращательного движений следует условие равновесия тел:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0,\ \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = 0.$$

3. Работа и механическая энергия

3.1. Работа и мощность при поступательном и вращательном движениях

Работа – это физическая величина, характеризующая процесс превращения одной формы движения в другую. В механике принято говорить, что работа совершается силой.

Элементарной работой силы $\vec{F}$ называется величина, равная скалярному произведению силы на элементарное перемещение $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} dt = F dS \cdot \cos\alpha,$$

где $dS = |d\vec{r}|$ – элементарный путь точки приложения силы за время dt, α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$.

Если на систему действуют несколько сил, то результирующая работа равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой силой в отдельности. Работа силы на конечном участке траектории или за конечный промежуток времени может быть вычислена следующим образом:

$$A = \int_{(L)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} dt.$$

Если $\vec{F} = \text{const}$, то $A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$.

При вращательном движении работа определяется проекцией момента сил на направление угловой скорости:

$$\delta A = M_\omega d\varphi, \quad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_\omega d\varphi,$$

если $M_\omega = const$, то $A = M_\omega \cdot \varphi$.

Быстроту совершения работы характеризует мощность. Мощностью называется скалярная величина, равная работе, совершаемой в единицу времени:

$$N = \frac{A}{\Delta t} \text{ – средняя мощность;} \quad N = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} \text{ – мгновенная мощность.}$$

При вращательном движении мощность определяется следующим образом:

$$N = M_\omega \omega .$$

3.2. Консервативные и неконсервативные силы

Консервативными силами называются силы, работа которых не зависит от пути перехода тела или системы из начального положения в конечное. Характерное свойство таких сил – работа на замкнутой траектории равна нулю:

$$\oint \vec{F}_{конс}\, d\vec{r} \equiv 0.$$

К консервативным силам относятся: сила тяжести, гравитационная сила, сила упругости и другие силы.

Неконсервативными силами называются силы, работа которых зависит от пути перехода тела или системы из начального положения в конечное. Работа этих сил на замкнутой траектории отлична от нуля.

К неконсервативным силам относятся: сила трения, сила тяги и другие силы.

3.3. Кинетическая энергия при поступательном и вращательном движениях

Кинетической энергией тела называется функция механического состояния, зависящая от массы тела и скорости его движения (энергия механического движения).

Кинетическая энергия поступательного движения $E_{к,пост} = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$.

Кинетическая энергия вращательного движения $E_{к,вр} = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2J}$.

При сложном движении твёрдого тела его кинетическая энергия может быть представлена через энергию поступательного и вращательного движения:

$$E_К = E_{К,пост} + E_{К,вр}.$$

Свойства кинетической энергии.

1. Кинетическая энергия является конечной, однозначной, непрерывной функцией механического состояния системы.

2. Кинетическая энергия не отрицательна: $E_K \geq 0$.

3. Кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетических энергий тел, составляющих систему.

4. Приращение кинетической энергии тела равно работе всех сил, действующих на тело: $\Delta E_K = A$.