МАТЕМАТИКА

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Наталья Владимировна
Крупина

Москва,
2021

Уравнения вида
a sinx + b cosx = c

Задача 6 Решить уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

▶ Поделив уравнение на $\cos x$, получим $2\,\mathrm{tg}\,x - 3 = 0$, $\mathrm{tg}\,x = \frac{3}{2}$, $x = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

При решении этой задачи обе части уравнения $2\sin x - 3\cos x = 0$ были поделены на $\cos x$. Напомним, что при делении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны корни. Поэтому нужно проверить, не являются ли корни уравнения $\cos x = 0$ корнями данного уравнения. Если $\cos x = 0$, то из уравнения $2\sin x - 3\cos x = 0$ следует, что $\sin x = 0$. Однако $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно равняться нулю, так как они связаны равенством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, при делении уравнения $a\sin x + b\cos x = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, на $\cos x$ (или $\sin x$) получаем уравнение, равносильное данному.

Уравнения вида
a sinx + b cosx = c

Задача 7 Решить уравнение $2\sin x + \cos x = 2$.

▶ Используя формулы $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ и записывая правую часть уравнения в виде $2 = 2\cdot 1 = 2\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)$, получаем

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2},$$

$$3\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0.$$

Поделив это уравнение на $\cos^2\frac{x}{2}$, получим равносильное уравнение $3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 4\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1 = 0$. Обозначая $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = y$, получаем уравнение $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi n$, $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁

Уравнения вида
a sinx + b cosx = c

Уравнение, рассмотренное в задаче 7, является уравнением вида

$$a \sin x + b \cos x = c, \qquad (1)$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, которое можно решить другим способом (при условии, что $c^2 \leqslant a^2 + b^2$). Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (2)$$

Введём вспомогательный аргумент φ, такой, что

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Такое число φ существует, так как

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1.$$

Таким образом, уравнение (2) можно записать в виде $\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, откуда

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (3)$$

Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$

Изложенный метод преобразования уравнения (1) к простейшему тригонометрическому уравнению (3) называется *методом введения вспомогательного угла*.

Задача 8 Решить уравнение $4 \sin x + 3 \cos x = 5$.

▶ Здесь $a = 4$, $b = 3$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$.

Поделим обе части уравнения на 5:

$$\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = 1.$$

Введём вспомогательный аргумент φ, такой, что $\cos \varphi = \frac{4}{5}$, $\sin \varphi = \frac{3}{5}$. Исходное уравнение можно записать в виде

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = 1, \quad \sin (x + \varphi) = 1,$$

откуда $x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $\varphi = \arccos \frac{4}{5}$,

$$x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ $x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ◁