Билет 15

1. Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника. Основное тригонометрическое тождество, формулы приведения

2. Медиана, биссектриса и высота треугольника. Теорема о медианах треугольника с доказательством

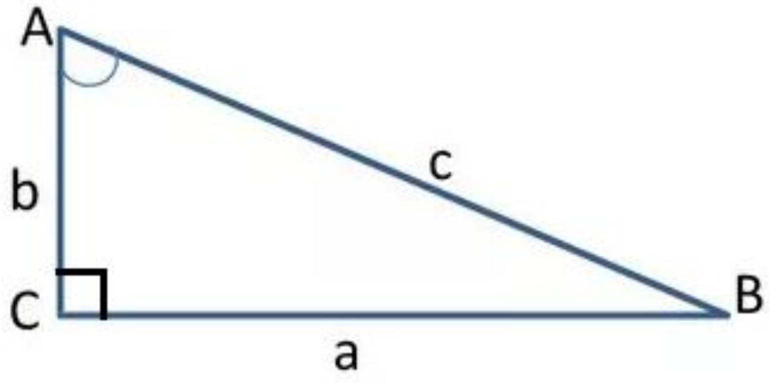
3. Задача

1. Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника. Основное тригонометрическое тождество, формулы приведения

Определение

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.

$$\sin A = \frac{a}{c}$$



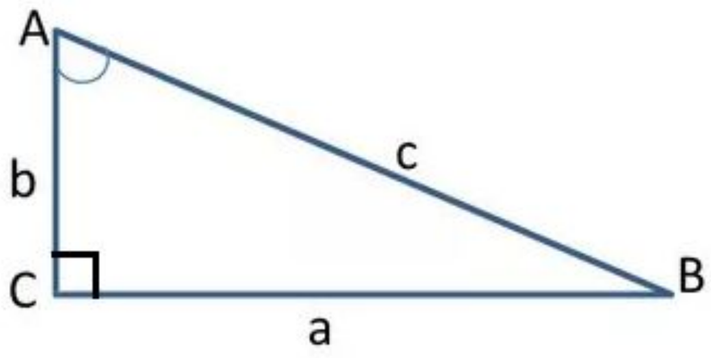
Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$|\sin A| \le 1 \text{ и } |\cos A| \le 1$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к прилежащему.

$$tg\,A = \frac{a}{b}$$



Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к противолежащему.

$$ctg\,A = \frac{b}{a}$$

синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла

зависят только от величины этого угла

$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$$

$$tg\,A = \frac{\sin A}{\cos A} \qquad ctg\,A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

Формулы приведения

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

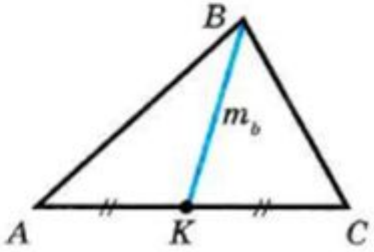
$$ctg(90° - \alpha) = tg\alpha$$

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$$

$$tg(90° - \alpha) = ctg\alpha$$

2. Медиана, биссектриса и высота треугольника

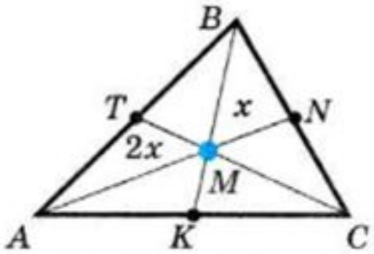
МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА



Определение. ***Медиана треугольника*** — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

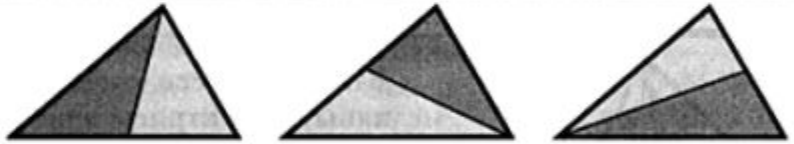
BK — медиана	K — середина AC

Свойства

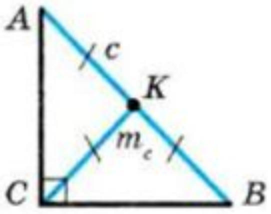


1. Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая каждую медиану делит в отношении 2:1, считая от вершины.

M — точка пересечения медиан (центр тяжести треугольника)	$\frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MK} = \frac{CM}{MT} = \frac{2}{1}$

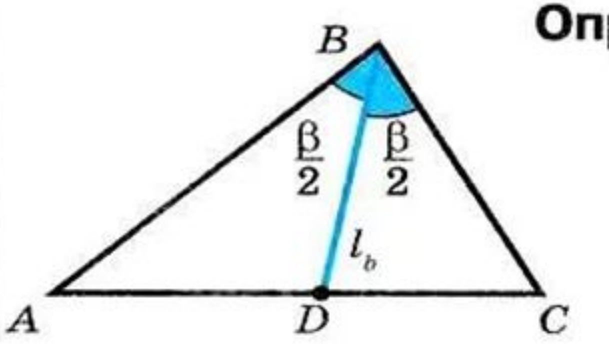


Каждая медиана делит треугольник на 2 равновеликих треугольника (одинаковой площади).



3. $\boxed{m_c = \frac{1}{2}c}$ В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

БИССЕКТРИСА ТРЕУГОЛЬНИКА



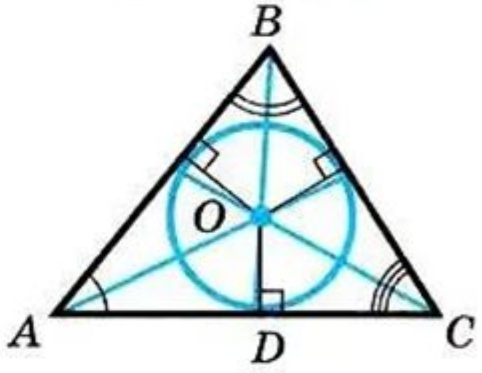
Определение. ***Биссектриса треугольника*** — отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.

BD — биссектриса треугольника	$\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle B$

Свойства

1. $\boxed{\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}}$ Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

2. Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, равноудаленной от трех сторон треугольника, — центре вписанной окружности.



O — точка пересечения биссектрис треугольника, центр вписанной окружности.

Теорема (свойство медиан)

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая о вершины треугольника.

Доказательство

На рисунке 116 медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажем, что медиана CC_1 также проходит через точку M и $\frac{BM}{MB_1} = \frac{AM}{MA_1} = \frac{CM}{MC_1} = \frac{2}{1}$.

Проведём $B_1K \parallel AA_1$. Так как $AB_1 = B_1C$, то по теореме Фалеса $A_1K = KC$, т. е. $\frac{A_1C}{A_1K} = \frac{2}{1}$. Поскольку $BA_1 = A_1C$, то $\frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{BM}{MB_1} = \frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$.

Таким образом, медиана AA_1, пересекая медиану BB_1, делит её в отношении 2 : 1, считая от вершины B.

Аналогично можно доказать (сделайте это самостоятельно), что медиана CC_1 также делит медиану BB_1 в отношении 2 : 1, считая от вершины B (рис. 117).

А это означает, что все три медианы треугольника ABC проходят через одну точку. Мы доказали, что эта точка делит медиану BB_1 в отношении 2 : 1. То, что эта точка делит в отношении 2 : 1 также медианы AA_1 и CC_1, доказывается аналогично. ◄

Рис. 116