

От проективной геометрии – к неевклидовой (вокруг абсолюта)

Пара 2

Пермикин Дмитрий Владимирович
УрФУ, 2018

Основные результаты первой пары

1. Параллельные прямые евклидовой плоскости пересекаются на бесконечно удаленной прямой.
2. Дезарг: Евклидова плоскость + бесконечно удаленная прямая = проективная плоскость.
3. Принцип двойственности: любое утверждение остается верным, если слово «точка» заменить на слово «прямая» и наоборот.
4. Проективная геометрия изучает геометрические формы и соответствия между ними.
5. Проективное соответствие между прямолинейными рядами порождает пучок второго порядка.
6. Проективное соответствие между пучками порождает кривую второго порядка (кривая, как множество точек).
7. Определения: ряд, пучок, проектирование ряда, сечение пучка, перспективное соответствие, проективное соответствие.
8. Определение проективного соответствия по Понселе:
Проективное соответствие является цепью перспективных соответствий.

Теорема 1.

Проективное соответствие между элементами любых двух образов первой ступени устанавливается заданием трех пар соответствующих элементов.

Теорема 2. (Теорема Дезарга).

Если в двух треугольниках, лежащих в одной плоскости, **прямые**, соединяющие две соответственные **вершины**, проходят через одну **точку**, то три **точки** пересечения двух соответственных **сторон** этих треугольников лежат на одной **прямой**.

Теорема 3. (Обратная Теорема Дезарга).

Если в двух треугольниках, лежащих в одной плоскости, **точки** пересечения двух соответственных **сторон**, лежат на одной **прямой**, то три **прямые**, соединяющие две соответственные **вершины** этих треугольников, проходят через одну **точку**.

Определение полного четырехвершинника (четырёхугольника):

Возьмем на плоскости четыре точки (из которых никакие три не лежат на одной прямой) и соединим эти точки попарно прямыми.

Противоположные стороны – стороны, не имеющие общей вершины.

Диагональные точки – точки пересечения противоположных сторон.

Определение гармонических точек:

Возьмем полный четырехвершинник $ABCD$. Противоположные стороны AC и BD пересекаются в точке E , а противоположные стороны AB и CD пересекаются в точке F . Прямая EF пересекает прямую AD в точке G и прямую BC в точке H .

Точку H будем называть четвертой гармонической точкой к трем данным точкам E , F , G и притом точкой, сопряженной с точкой G относительно пары EF .

Будем говорить, что пара точек GH гармонически сопряжена с парой точек EF .

Теорема 4.

Если в двух полных четырехвершинниках пять пар соответственных сторон пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, то и шестая пара пересекается в точке, лежащей на этой же прямой.

Теорема 5.

По трем данным точкам A , B , C четвертая гармоническая точка D находится единственным образом.

Теорема 6.

Если пара точек MN гармонически сопряжена паре AB , то и обратно, пара точек AB гармонически сопряжена паре MN .

Определение.

Четыре луча пучка составляют гармонической группой лучей, если они проектируют гармоническую группу точек.

Теорема 7.

Если гармоническую группу лучей пересечь прямой, то в сечении получим гармоническую группу точек.

Определение проективного соответствия по Штаудту: Проективное соответствие между основными образами первой ступени будем называть проективным, если между элементами этих образов установлено взаимно однозначное соответствие и притом такое, что каждой гармонической группе элементов одного образа соответствуют гармоническая же группа элементов другого образа.