Числовые характеристики случайной величины

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины и определяется по формулам:

$$m_X = \mathrm{M}[X] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} x_i \cdot p_i \quad \text{для} \quad \text{ДСВ}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \quad \text{для} \quad \text{НСВ}. \end{cases} \qquad (5.1)$$

где m_x обозначает число, полученное после вычислений по формуле (5.1); M[X] - оператор математического ожидания.

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1. $\mathrm{M}[c] = c$.

Доказательство. Рассмотрим константу ***c***, как случайную дискретную величину, которая принимает одно значение ***c*** с вероятностью $p = 1$.

2. $\mathrm{M}[X+c] = \mathrm{M}[X]+c = m_X + c$

Доказательство:

$$\mathrm{M}[X+c] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x+c)\cdot f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} c \cdot f(x)dx = m_X + c$$

3. M[cX] = cM[X] = $c \cdot m_X$

Доказательство: $$\mathrm{M}[cX] = \int_{-\infty}^{\infty} cx \cdot f(x)dx = c\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = c \cdot m_X$$

Начальный момент k-го порядка случайной величины X есть математическое ожидание k-й степени этой случайной величины:

$$\alpha_k(x) = \mathrm{M}[X^k] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} x_i^k \cdot p_i & \text{для ДСВ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)dx & \text{для НСВ.} \end{cases} \tag{5.2}$$

При k=0 $\alpha_0(x) = M[X^0] = M[1] = 1$

k=1 $\alpha_1(x) = M[X^1] = M[X] = m_X$ – математическое ожидание;

k=2 $\alpha_2(x) = M[X^2]$

Центрированной случайной величиной $\mathring{X}$ называется случайная величина, математическое ожидание которой находится в начале координат (в центре числовой оси), т.е. $M[\mathring{X}]=0$

Операция центрирования (переход от нецентрированной величины X к центрированной $\mathring{X}$) имеет вид $\mathring{X}=X-m_X$

Центральный момент порядка k случайной величины X есть математическое ожидание k-й степени центрированной случайной величины $\mathring{X}$

$$\mu_k(x)=\mathrm{M}[\mathring{X}^k]=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i-m_X)^k p_i \quad \text{для ДСВ}, \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_X)^k f(x)dx \quad \text{для НСВ}.\end{cases} \tag{5.3}$$

При k=0 $\mu_0(x)=M[\mathring{X}^0]=M[1]=1$

k=1 $\mu_1(x)=M[\mathring{X}^1]=M[\mathring{X}]=0$

k=2 $\mu_2(x)=M[\mathring{X}^2]=M[(X-m_X)^2]=M[X^2]-2m_X M[X]+m_X^2=\alpha_2-m_x^2=D_X$ - дисперсия.

Дисперсия случайной величины характеризует степень рассеивания (разброса) значений случайной величины относительно ее математического ожидания и определяется по формулам:

$$D_x = D[X] = \mu_2(x) = \alpha_2(\mathrm{x}) - m_X^2 = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} (x_i - m_X)^2 p_i = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i^{\,2} p_i - m_X^2 & \text{(для ДСВ)} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - m_X^2 & \text{(для НСВ)} \end{cases} \qquad (5.4)$$

Свойства дисперсии:

1. $D[c] = 0$.

Доказательство: $D[c] = M\left[(c - M[c])^2\right] = M\left[(c-c)^2\right] = M[0] = 0$

2. $D[X+c] = D_X$.

Доказательство:

$$D[X+c] = M\left[(X + c - M[X+c])^2\right] = M\left[(X + c - m_X - c)^2\right] = M[(X - m_X)^2] = D_X$$

вытекает из свойства 3 математического ожидания. Оно становится понятным, если учесть, что величины X и $X+c$ отличаются лишь началом отсчета и рассеяны вокруг своих математических ожиданий одинаково.

Очевидно, что операция центрирования не изменяет дисперсию случайной величины:

$$D[\mathring{X}] = D[X - m_X] = D[X]$$

3. $D[cX] = c^2 \cdot D_X$

Доказательство: $D[cX] = M[c^2X^2] - \left(M[cX]\right)^2 = c^2(M[X^2] - m_X^2) = c^2 D_X$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины X характеризует ширину диапазона значений X и равно

$$\sigma_X = \sigma[X] = +\sqrt{D[X]} \qquad (5.5)$$

СКО измеряется в тех же физических единицах, что и случайная величина.

Правило 3σ. Практически все значения случайной величины находятся в интервале

$$[\, m_X - 3\sigma_X; \;\; m_X + 3\sigma_X; \,]. \qquad (5.6)$$

Соотношения, связывающие начальные и центральные моменты:

$$\mu_3 = \left[\mathring{X}^3\right] = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 \qquad \mu_4 = \left[\mathring{X}^4\right] = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_3 - 3\alpha_1^4$$

Мода случайной величины равна ее наиболее вероятному значению, т.е. то значение, для которого вероятность p_i (для дискретной случайной величины) или $f(x)$ (для непрерывных случайной величины) достигает максимума:

$$f(Mo) = max, p(X = Mo) = max$$

Медиана случайной величины X равна такому ее значению, для которого выполняется условие $p\{X<Me\} = p\{X>=Me\}$. Медиана, как правило, существует только для непрерывных случайных величин. Значение Me может быть определено как решение одного из следующих уравнений:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = 0,5 \qquad \int_{Me}^{+\infty} f(x)dx = 0,5 \qquad F(Me) = 0,5 \qquad (5.7)$$

Квантиль χ_p случайной величины X - это такое ее значение, для которого выполняется условие

$$p\{X< \chi_p\} = F(\chi_p) = p. \qquad (5.8)$$

Очевидно, что медиана – это квантиль $\chi_{0,5}$.

Коэффициент вариации $\upsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{m_x}$