Понятие формирующего фильтра и его свойства

Постановка задачи

Имеется система стохастических линейных дифференциальных уравнений

$$\boxed{x(t) = F(t)x(t) + G(t)w(t)}\ . \qquad (1)$$

– **формирующий фильтр**

Здесь $x(t)$ – n-мерный случайный процесс, называемый **вектором состояния.**

$w(t)$ – не зависящий от $x(0)$ центрированный p-мерный белый шум, называемый **порождающим**.

$F(t)$ – **матрица динамики**;

$G(t)$ – **матрица порождающих шумов.**

Задача заключается в определении математического ожидания и матрицы ковариаций для вектора состояния $x(t)$.

Общее решение

Запишем решение уравнения (1) в виде

$$x(t)=\Phi(t,t_1)x(t_1)+\int_{t_1}^{t}\Phi(t,\tau)G(\tau)w(\tau)\mathrm{d}\tau \quad .$$

(2)

$$\dot{x}(t)=F(t)x(t)$$

$\Phi(t,t_1)$ – фундаментальная матрица для уравнения .

Математическое ожидание, матрица ковариаций и корреляционная функция определяются следующими соотношениями:

$$\bar{x}(t)=\Phi(t,t_0)\bar{x}(t_0);$$

$$P(t)=\Phi(t,t_0)P(t_0)\Phi^{\mathrm{T}}(t,t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)G(\tau)Q(\tau)G^{\mathrm{T}}(\tau)\Phi^{\mathrm{T}}(t,\tau)\mathrm{d}\tau;$$

(3)

$$k(t_2,t_1)=\begin{cases}\Phi(t_2,t_1)P(t_1), & t_2>t_1,\\ P(t_2)\Phi^{\mathrm{T}}(t_1,t_2), & t_2\le t_1.\end{cases}$$

(4)

$$\dot{P}(t)=F(t)P(t)+P(t)F^{\mathrm{T}}(t)+G(t)Q(t)G^{\mathrm{T}}(t)$$

(5)

Стационарный процесс

Запишем стационарные уравнения

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gw(t); \quad (7)$$

$$\dot{P} = FP + PF^{\mathrm{T}} + GQG^{\mathrm{T}}. \quad (8)$$

Матрицы F, G и Q постоянны.

Условия стационарности процесса на выходе стационарной системы

1. Математическое ожидание процесса $x(t)$ не зависит от времени при выполнении условия

$$\dot{\bar{x}} = 0$$

2. Матрица ковариаций не зависит от времени если существует матрица P_∞, такая что при $P = P_\infty$

$$\dot{P}_\infty = FP_\infty + P_\infty F^{\mathrm{T}} + GQG^{\mathrm{T}} = 0. \quad (9)$$

Если матрицу ковариаций $P(0)$ для вектора $x(0)$ выбрать

Условиями стационарности процесса на выходе стационарной системы при поступлении на ее вход белого шума являются центрированность значений процесса в начальный момент времени, наличие решения уравнения (9) и выбор начальной матрицы ковариаций, совпадающей с этим решением.

При этом корреляционная функция будет зависеть только от τ

$$k(\tau) = k^{\mathrm{T}}(-\tau) = \Phi(\tau) P_{\infty}. \qquad (10)$$

Если установившееся решение уравнения

$$\dot{P}_{\infty} = F P_{\infty} + P_{\infty} F^{\mathrm{T}} + G Q G^{\mathrm{T}} = 0. \qquad (11)$$

существует, но начальная матрица ковариаций не совпадает с P_{∞}, то, поскольку $P \to P_{\infty}$ при увеличении времени, процесс после завершения переходного режима при $t \to \infty$ можно считать стационарным.

Замечание 1

Если дополнительно предположить, что $x(0)$ и порождающий шум гауссовские, т.е.

$$f(x(0)) = N(x(0);\bar{x}(0),P(0));\\ f(w(t)) = N(w(t);0,Q(t)), \tag{12}$$

то и процесс $x(\mathrm{t})$ также будет гауссовским.

Замечание 2

Используя выражение

$$x(t) = \Phi(t,t_1)x(t_1) + \int_{t_1}^{t} \Phi(t,\tau)G(\tau)w(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{13}$$

можно убедиться в том, что процесс $x(t)$ является марковским. Если зафиксировать моменты времени $t_1>t_2>t_3$, то значение процесса в момент t_3 при фиксированных его значениях в моменты t_1 и t_2 зависит только от момента t_2 и не зависит от t_1. При этом белый шум $w(t)$ не зависит в статистическом смысле от начальных условий $x(0)$.

Пример

Рассмотрим формирующий фильтр

$$x(t) = -\alpha x(t) + \sqrt{2\sigma_x^2 \alpha}\, w(t), \tag{14}$$

где F=-α, $G = \sqrt{2\sigma_x^2 \alpha}$

Уравнение для корреляционной функции примет вид

$$\dot{P} = -\alpha P - \alpha P + G^2. \tag{15}$$

В силу того, что $\Phi(t,t_0)=e^{-\alpha(t-t_0)}$, решение этого уравнения можно представить

$$P(t) = P(t_0)e^{-2\alpha(t-t_0)} + 2\sigma_x^2 \alpha \int_{t_0}^{t} e^{-2\alpha(t-\tau)} d\tau. \tag{16}$$

Уравнение $\dot{P}_\infty = FP_\infty + P_\infty F^{\mathrm{T}} + GQG^{\mathrm{T}} = 0$ сводится к уравнению $2\alpha P_\infty = 2\sigma_x^2 \alpha$, имеющему решение $P_\infty = \sigma_x^2$.

Таким образом, при $P(0)=\sigma_x^2$ процесс будет стационарным, а соответствующая ему корреляционная функция примет вид

$$k(\tau) = k(-\tau) = \Phi(\tau)P = \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau}. \tag{17}$$