Российский технологический университет

Линейная алгебра

Практическое занятие №9
Решение задач по теме: «Линейные операторы».

Теоретическое введение

1. *Линейным оператором* в линейном пространстве V называется всякое отображение $\mathbf{A}$: $V \to V$ пространства V в себя, обладающее свойствами

$$\mathbf{A}(\lambda x) = \lambda \mathbf{A}(x), \qquad \mathbf{A}(x+y) = \mathbf{A}(x) + \mathbf{A}(y).$$

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – некоторый фиксированный базис в линейном пространстве V. Так как $\mathbf{A}(e_1)$, $\mathbf{A}(e_2), \ldots,$ $\mathbf{A}(e_n)$ – векторы пространства V, то каждый из них можно разложить единственным образом по векторам базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\mathbf{A}(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n,$$

$$\mathbf{A}(e_1) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathbf{A}(e_1) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n.$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей линейного оператора* $\mathbf{A}$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Теоретическое

Заданием матрицы оператор определяется однозначно, а именно: если $y = \mathbf{A}(x)$, то $Y = AX$, где X, Y – столбцы координат векторов x, y и A – матрица оператора $\mathbf{A}$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

2. Пусть A и A' – матрицы оператора $\mathbf{A}$ в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e_1', e_2', \ldots, e_n'$, а $T = T_{e \to e'}$ – матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e_1', e_2', \ldots, e_n'$. Тогда *формула преобразования матрицы оператора* имеет вид

$$A' = T^{-1} A T.$$

Теоретическое введение

3. *Сумма и произведение линейных операторов*, а также произведение линейного оператора на число определяется равенствами:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})(x)=\mathbf{A}(x)+\mathbf{B}(x),$$

$$(\mathbf{AB})(x)=\mathbf{A}(\mathbf{B}(x)),$$

$$(\lambda\mathbf{A})(x)=\lambda(\mathbf{A}(x)).$$

Матрицы этих операторов определяются $A+B,\ AB,\ \lambda A$ соответственно.

Обратным к оператору **A** называется оператор $\mathbf{A}^{-1}$ такой, что

$\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\ \mathbf{A}=\mathbf{E}$, где **E** – единичный оператор ($\mathbf{E}(x)=x$). Оператор **A** имеет обратный в том и только в том случае, когда его матрица невырождена (в любом базисе).

Теоретическое введение

4. *Собственные числа и собственные векторы линейного оператора.*

Ненулевой вектор $x \in V$ $(x \neq 0)$ называется *собственным вектором* линейного оператора **A** , если найдется такое действительное число λ, что

$$\mathbf{A}(x) = \lambda x.$$

Тогда число λ называется *собственным числом* линейного оператора **A**, соответствующим вектору x . Если A – матрица оператора **A** в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, X – столбец координат вектора x , то матричное равенство запишется в виде

$$(A - \lambda E)X = O \ , \ X \neq O \ .$$

Отсюда следует, что число λ есть собственное число оператора **A** в том и только в том случае, если $|A - \lambda E| = 0$, т.е.

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.}$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*, а левая часть –

Теоретическое введение

характеристическим многочленом линейного оператора **A**.

Характеристический многочлен линейного оператора *не зависит от выбора базиса.*

Для каждого собственного значения λ_p находим все ненулевые решения однородной системы уравнений

$$\boxed{(A-\lambda_p E)X = O.}$$

Каждое ненулевое решение X этой системы является столбцом координат в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ собственного вектора оператора **A**, соответствующего собственному значению λ_p.

Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Если матрица линейного оператора является действительной *симметрической*, то все корни характеристического уравнения – действительные числа. Такой оператор имеет только действительные собственные векторы.

Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям симметричной матрицы, ортогональны.

Теоретическое введение

5. Линейный оператор называется <u>*диагонализируемым*</u>, если существует базис, в котором его матрица является диагональной.

Матрица оператора **A** в базисе, состоящем из его собственных векторов, соответствующих собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ является диагональной:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

И обратно, если матрица A линейного оператора **A** в некотором базисе является диагональной , то все векторы этого базиса – собственные векторы оператора **A** с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Таким образом, сформулируем *критерий диагонализируемости линейного оператора*. Линейный оператор является диагонализируемым тогда и только тогда, когда в линейном пространстве существует базис, каждый вектор которого является собственным вектором этого оператора.

Теоретическое введение

6. Линейный оператор **A** евклидова пространства называется *ортогональным*, если он сохраняет скалярное произведение любых двух векторов x и y этого пространства, т.е. $(\mathbf{A}x, \mathbf{A}y)=(x, y)$.

Ортогональный оператор переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный. Наоборот, если оператор переводит какой-нибудь ортонормированный базис в ортонормированный, то он является ортогональным.

Решение задачи №1

ЗАДАНИЕ. *Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования A, заданного уравнениями $x' = 5x + 4y$, $y' = 8x + 9y$.*

РЕШЕНИЕ. Запишем матрицу преобразования для A:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или } \lambda^2 - 14\lambda + 13 = 0.$$

Из этого квадратного уравнения найдем $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 13$. Для определения координат первого собственного вектора $u_1(\xi_1, \xi_2)$, соответствующего характеристическому числу λ_1 решим систему

$$\begin{cases} (\lambda_1 - 5)\xi_1 + 4\xi_2 &= 0, \\ 8\xi_1 + (9 - \lambda_1)\xi_2 &= 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\xi_1 + 4\xi_2 &= 0, \\ 8\xi_1 + 8\xi_2 &= 0. \end{cases}$$

Отсюда $\xi_1 = -\xi_2$, то есть собственный вектор u_1 имеет координаты $(C, -C)$, где C - любое число (фактически, характеристическому числу λ_1 соответствует семейство собственных векторов).

Аналогично найдем координаты второго собственного вектора $u_2(\xi_1, \xi_2)$

$$\begin{cases} (\lambda_2 - 5)\xi_1 + 4\xi_2 &= 0, \\ 8\xi_1 + (9 - \lambda_2)\xi_2 &= 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8\xi_1 + 4\xi_2 &= 0, \\ 8\xi_1 - 4\xi_2 &= 0. \end{cases}$$

Отсюда $\xi_2 = 2\xi_1$, то есть собственный вектор u_2 имеет координаты $(C, 2C)$, где C - любое число (фактически, характеристическому числу λ_2 соответствует семейство собственных векторов).

$$x' = 5x + 4y, \qquad \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$y' = 8x + 9y$$

Решение задачи №2

ЗАДАНИЕ. *Найти в ортонормированном базисе* i, j, k *матрицу линейного оператора* $f: E^3 \to E^3$, *переводящего любой вектор* x *в вектор* $y = f(x)$.
$f(x) = (a, x)a$, *если* $a = i - j + 2k$

РЕШЕНИЕ:

Пусть вектор $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$.
Тогда
$$y = f(x) = (a, x)a = (x_1 - x_2 + 2x_3)(i - j + 2k) =$$
$$= i(x_1 - x_2 + 2x_3) + j(-x_1 + x_2 - 2x_3) + k(2x_1 - 2x_2 + 4x_3)$$

Получаем, что вектор $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ переводится в вектор $y = i(x_1 - x_2 + 2x_3) + j(-x_1 + x_2 - 2x_3) + k(2x_1 - 2x_2 + 4x_3)$.
Матрица такого линейного преобразования $y = Ax$ имеет вид:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение задачи №3

Задача. Даны два линейных преобразования:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + 2x_3, \\ x_2' = -3x_2 + x_3, \\ x_3' = 2x_1 + 3x_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1'' = 3x_1' + x_2', \\ x_2'' = x_1' - 2x_2' - x_3', \\ x_3'' = 3x_2' + 2x_3'. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3.

Решение. Обозначим преобразования следующим образом (запишем в матричном виде):

$$X' = AX,\ X'' = BX',\ \text{где}\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $X'' = BX' = BAX$ - преобразование, выражающее x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3.

Получаем:

$$X'' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3+0+0 & 6-3+0 & 6+1+0 \\ 1+0-2 & 2+6+0 & 2-2-3 \\ 0+0+4 & 0-9+0 & 0+3+6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ -1 & 8 & -3 \\ 4 & -9 & 9 \end{pmatrix} X$$

Решение задачи №4

Задача. *Установить, являются ли заданные отображения $A: R^4 \to R^4$ линейными. В случае линейности отображения записать матрицу оператора A в каноническом базисе* $e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0)$, $e_3=(0,0,1,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$.

а) $Ax=(x_1-2x_4;x_2+x_3;-x_1;x_1+3x_2)$;

б) $Ax=(x_1-2x_4;x_2\cdot x_3;-x_1;x_1+3x_2)$.

Решение

По условию, пространство R^4 отображается в пространство R^4, следовательно, для любых элементов (векторов) этого пространства $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ и произвольного числа λ, введены операции сложения и умножения на число: $x+y=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ x_4+y_4)\in R^4$, $\lambda x=(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \lambda x_3,\ \lambda x_4)\in R^4$.

а) Если $Ax=(x_1-2x_4;x_2+x_3;-x_1;x_1+3x_2)$, то:

$$Ax=(x_1;x_2;x_3;x_4)=(x_1-2x_4;x_2+x_3;-x_1;x_1+3x_2),$$

$$Ay=(y_1;y_2;y_3;y_4)=(y_1-2y_4;y_2+y_3;-y_1;y_1+3y_2).$$

Проверим выполнение условий линейности отображения:

1)

$$A(x+y)=(x_1+y_1;x_2+y_2;x_3+y_3;x_4+y_4)=$$

$$((x_1+y_1)-2(x_4+y_4);(x_2+y_2)+(x_3+y_3);-(x_1+y_1);(x_1+y_1)+3(x_2+y_2))=$$

$$=((x_1+y_1-2x_4-2y_4);(x_2+y_2+x_3+y_3);(-x_1-y_1);(x_1+y_1+3x_2+3y_2))=$$

$$=((x_1-2x_4+y_1-2y_4);(x_2+x_3+y_2+y_3);(-x_1-y_1);(x_1+3x_2+y_1+3y_2))=$$

$$=((x_1-2x_4)+(y_1-2y_4);(x_2+x_3)+(y_2+y_3);(-x_1)+(-y_1);(x_1+3x_2)+(y_1+3y_2))=Ax+Ay$$

$A(x+y)=$ $Ax+Ay$ равны, следовательно, первое условие линейности отображения выполняется.

2) $A(\lambda x)=(\lambda x_1;\lambda x_2;\lambda x_3;\lambda x_4)=(\lambda x_1-2\lambda x_4;\lambda x_2+\lambda x_3;-\lambda x_1;\lambda x_1+3\lambda x_2)=$

$$=(\lambda(x_1-2x_4);\lambda(x_2+x_3);-\lambda x_1;\lambda(x_1+3x_2))=$$

$\lambda(x_1-2x_4;x_2+x_3;-x_1;x_1+3x_2)=\lambda Ax$, следовательно, второе условие линейности отображения тоже выполняется.

Таким образом, отображение $Ax=(x_1-2x_4;x_2+x_3;-x_1;x_1+3x_2)$ является линейным оператором.

Найдем матрицу этого оператора в каноническом базисе $e_1 = (1;0;0;0)$, $e_2 = (0;1;0;0)$, $e_3 = (0;0;1;0)$, $e_4 = (0;0;0;1)$.

В силу линейности оператора для произвольного $x = (x_1;x_2;x_3;x_4)$:

$$Ax = (x_1e_1;x_2e_2;x_3e_3;x_4e_4) = A(x_1e_1) + A(x_2e_2) + A(x_3e_3) + A(x_4e_4) =$$
$$= x_1A(e_1) + x_2A(e_2) + x_3A(e_3) + x_4A(e_4) =$$
$$= x_1A(1;0;0;0) + x_2A(0;1;0;0) + x_3A(0;0;1;0) + x_4A(0;0;0;1)$$

Для заданного преобразования:

$$A(e_1) = (1;0;-1;1;); \quad A(e_2) = (0;1;0;3); \quad A(e_3) = (0;1;0;0); \quad A(e_4) = (-2;0;0;0)$$

Преобразованный вектор Ax имеет в стандартном базисе координаты

$$Ax = x_1(1;0;-1;1) + x_2(0;1;0;3) + x_3(0;1;0;0) + x_4(-2;0;0;0) = (x_1 - 2x_4;x_2 + x_3;-x_1;x_1 + 3x_2)$$

Такому оператору соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, т.к.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_4 \\ x_2 + x_3 \\ -x_1 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix},$$

б) Проверим выполнение условий линейности отображения $Ax=(x_1-2x_4;x_2\cdot x_3;-x_1;x_1+3x_2)$.

Т.к. $Ax=A(x_1;x_2;x_3;x_3)=(x_1-2x_4;x_2\cdot x_3;-x_1;x_1+3x_2)$,

$Ay=A(y_1;y_2;y_3;y_3)=(y_1-2y_4;y_2\cdot y_3;-y_1;y_1+3y_2)$, то

$$A(x+y)=(x_1+y_1;x_2+y_2;x_3+y_3;x_4+y_4)=$$
$$=((x_1+y_1)-2(x_4+y_4);(x_2+y_2)\cdot(x_3+y_3);-(x_1+y_1);(x_1+y_1)+3(x_2+y_2))=$$
$$=((x_1+y_1-2x_4-2y_4);(x_2x_3+y_2x_3+x_2y_3+y_2y_3);(-x_1-y_1);(x_1+y_1+3x_2+3y_2))=$$
$$=((x_1-2x_4)+(y_1-2y_4);\underline{(x_2x_3+y_2x_3+x_2y_3+y_2y_3)};(-x_1)+(-y_1);(x_1+3x_2)+(y_1+3y_2))$$
$$Ax+Ay=(x_1-2x_4;x_2\cdot x_3;-x_1;x_1+3x_2)+(y_1-2y_4;y_2\cdot y_3;-y_1;y_1+3y_2)=$$
$$=(x_1-2x_4+y_1-2y_4;x_2x_3+y_2y_3;-x_1-y_1;x_1+3x_3+y_1+3y_2)=$$
$$((x_1+y_1)-2(x_4+y_4);\underline{(x_2x_3+y_2y_3)};-(x_1+y_1);(x_1+y_1)+3(x_2+y_2))$$

Третьи координаты векторов $A(x+y)$ и $Ax+Ay$ не равны: $x_2x_3+y_2x_3+x_2y_3+y_2y_3\neq x_2x_3+y_2y_3$; следовательно, $A(x+y)\neq Ax+Ay$, то есть рассмотренное отображение не является линейным.

Ответ:

а) отображение является линейным; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

б) отображение не является линейным.

Решение задачи №5

ЗАДАНИЕ. *Найти собственные значения и собственные вектора линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей A.*

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & -4\\ -2 & 1 & -2\\ 5 & 2 & 7\end{pmatrix}$$

РЕШЕНИЕ:

Решим характеристическое уравнение:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -2 & -4\\ -2 & 1-\lambda & -2\\ 5 & 2 & 7-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(-2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ 2 & 7-\lambda\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 5 & 7-\lambda\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-2 & 1-\lambda\\ 5 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=-(2+\lambda)\left(7-\lambda-7\lambda+\lambda^2+4\right)+2\left(-14+2\lambda+10\right)-4\left(-4-5+5\lambda\right)=$$

$$=-\left(22-16\lambda+2\lambda^2+11\lambda-8\lambda^2+\lambda^3\right)+\left(-8+4\lambda\right)+\left(36-20\lambda\right)=$$

$$=-\left(22-5\lambda-6\lambda^2+\lambda^3+8-4\lambda-36+20\lambda\right)=-\left(\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6\right)=0$$

Решая уравнение, находим собственные значения $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$ кратности 1. Найдем соответствующие собственные векторы.

Пусть $\lambda_1 = 1$. Решаем систему

$$\begin{cases} -3x-2y-4z=0, \\ -2x-2z=0, \\ 5x+2y+6z=0. \end{cases} \quad \begin{cases} 3z-2y-4z=0, \\ x=-z, \\ -5z+2y+6z=0. \end{cases} \quad \begin{cases} 2y=-z, \\ x=-z, \\ 2y=-z. \end{cases} \quad \begin{cases} y=-1/2\cdot z, \\ x=-z, \\ z=z. \end{cases}$$

Собственный вектор: $X_1 = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пусть $\lambda_2 = 2$. Решаем систему

$$\begin{cases} -4x-2y-4z=0, \\ -2x-y-2z=0, \\ 5x+2y+5z=0. \end{cases} \quad \begin{cases} x+z=0, \\ -2x-y-2z=0, \\ 5x+2y+5z=0. \end{cases} \quad \begin{cases} x=-z, \\ 2z-y-2z=0, \\ -5z+2y+5z=0. \end{cases} \quad \begin{cases} x=-z, \\ y=0, \\ z=z. \end{cases}$$

Собственный вектор: $X_2 = C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пусть $\lambda_3 = 3$. Решаем систему

$$\begin{cases} -5x-2y-4z=0, \\ -2x-2y-2z=0, \\ 5x+2y+4z=0. \end{cases} \quad \begin{cases} -3x-2z=0, \\ -2x-2y-2z=0, \\ -3x-2z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} -3x-2z=0, \\ x+y+z=0, \\ -3x-2z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2z=-3x, \\ y=-x-z, \\ x=x, \end{cases} \quad \begin{cases} z=-3/2\cdot x, \\ y=1/2\cdot x, \\ x=x. \end{cases}$$

Собственный вектор: $X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$

Решение задачи №6

Задача. *Линейный оператор* $A: R^3 \to R^3$ *в базисе* e_1, e_2, e_3 *представлен данной матрицей. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе* f_1, f_2, f_3.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} f_1 = e_1 - e_2 + 3e_3, \\ f_2 = 4e_1 + e_2 - e_3, \\ f_3 = 2e_1 - 3e_2. \end{cases}$$

Решение

При переходе от «старого» базиса e_1, e_2, e_3 к «новому» базису f_1, f_2, f_3 изменяются координаты векторов пространства и, следовательно, изменяется матрица линейного оператора. При этом, матрица A оператора в «старом» базисе и матрица A' того же оператора в «новом» базисе связаны соотношением $A' = F^{-1} \cdot A \cdot F$, где F - матрица перехода от «старого» базиса к «новому», то есть квадратная матрица, столбцы которой состоят из координат новых базисных векторов в «старом» базисе.

Составим матрицу перехода $F = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ и вычислим $A' = F^{-1} \cdot A \cdot F$.

Для этого найдем матрицу F^{-1}: $F^{-1} = \frac{1}{\det F}\begin{vmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{vmatrix}$,

$$\det F = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -43,$$

$$F_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad F_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad F_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14,$$

$$F_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9, \quad F_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6, \quad F_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$F_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad F_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 13, \quad F_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$F^{-1} = -\frac{1}{43}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -14 \\ -9 & -6 & 1 \\ -2 & 13 & 5 \end{pmatrix}$$

и вычислим $A' = F^{-1} \cdot A \cdot F$:

$$A' = F^{-1}AF = -\frac{1}{43}\begin{pmatrix} -3 & -2 & -14 \\ -9 & -6 & 1 \\ -2 & 13 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{43}\begin{pmatrix} 18 & -37 & -3 \\ 11 & -25 & 34 \\ 12 & 47 & -45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{46}{43} & -\frac{38}{43} & -\frac{147}{43} \\ -\frac{138}{43} & \frac{15}{43} & -\frac{97}{43} \\ \frac{170}{43} & -\frac{140}{43} & \frac{117}{43} \end{pmatrix}.$$

Ответ. Матрица перехода $A' = \begin{pmatrix} -\frac{46}{43} & -\frac{38}{43} & -\frac{147}{43} \\ -\frac{138}{43} & \frac{15}{43} & -\frac{97}{43} \\ \frac{170}{43} & -\frac{140}{43} & \frac{117}{43} \end{pmatrix}$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$. Являются ли линейными преобразования A,B,C.

$$Ax=(6x_1-5x_2-4x_3,-3x_1-2x_2-x_3,x_2+2x_3),$$
$$Bx=(6-5x_2-4x_3,3x_1-2x_2-x_3,x_2+2),$$
$$Cx=(x_3^4,3x_1-2x_2-x_3,x_2+2x_3)$$

Задача 2. Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$, $Ax=(x_2-x_3,x_1,x_1+x_3)$, $Bx=(x_2,2x_3,x_1)$. Найти ABx.

Задача 3. Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$, $Ax=(x_2-x_3,x_1,x_1+x_3)$, $Bx=(x_2,2x_3,x_1)$. Найти $(A^2-B)x$.

Задача 4. По известной матрице линейного оператора A_f в базисе f_1, f_2, f_3, найти A_u в базисе g_1, g_2, g_3.

$$A_f=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} f_1(x)=1 & g_1(x)=1+2x \\ f_2(x)=x & g_2(x)=-1+2x+x^2 \\ f_3(x)=x^2 & g_3(x)=-1+x+x^2 \end{matrix}$$

Задача 5. По известной матрице линейного оператора A_e в базисе e_1,e_2,e_3 и разложению базиса *e* по базису *u*, найти A_u в базисе u_1,u_2,u_3.

$$A_e=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} e_1=u_1+u_2-u_3 \\ e_2=u_1+2u_2-u_3 \\ e_2=2u_2+u_3 \end{matrix}$$

Задача 6. Является ли линейный оператор **A**, заданный в некотором базисе матрицей A диагонализируемым?

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Если да, то найти диагональную матрицу этого оператора и указать базис, в котором она имеет такой вид.

Задача 7. В пространстве P_2 многочленов $p(x)$ степени ≤ 2 записать матрицу оператора **A** в базисе:

а) $1, x, x^2$; б) $1, 2+x, 1+x-3x^2$,

где

1) $\mathbf{A}(p(x)) = (x+1)p'(x)$,
2) $\mathbf{A}(p(x)) = xp'(x) - 2p(x)$,
3) $\mathbf{A}(p(x)) = (x^2+1)p''(x)$,
4) $\mathbf{A}(p(x)) = (x^2-x+1)p''(x) + p(x)$,
5) $\mathbf{A}(p(x)) = ((x^2+3x+1)p'(x))'$.

Спасибо за внимание!