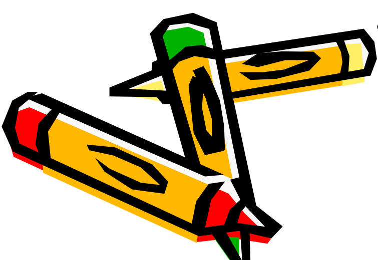
Комплексные числа.

Панарад А.Ю.
Кафедра Алгебры, Геометрии и Анализа.
ДВФУ

~~1.~~
~~2.~~

a) Сложение комплексных чисел;
b) Вычитание комплексных чисел;
c) Умножение комплексных чисел;
d) Деление комплексных чисел ;
e) Возведение в n-степень;
f) Извлечение корней из комплексных чисел.



Определение.

Комплексным числом Z называется выражение вида $\boxed{z = \alpha + \beta i}$,

где α и β- действительные числа, а i - мнимая единица, и $\boxed{i^2 = -1}$

Например, Z_1 = 6+2i или Z_2 = 1-5i .

Число α называется *действительной* частью комплексного числа и обозначается α=Re z,

а β – *мнимой* частью и обозначается β=Im z.

Два комплексных числа называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

$$z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i\,;$$

$$z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2\,; \beta_1 = \beta_2$$

Два комплексных числа, отличающихся лишь знаком мнимой части, называются *комплексно-сопряженными.*

$$z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$$

$$z_2 = \alpha_2 - \beta_2 i$$

$$z_1 = 5 + 3i\ ;$$

$$z_2 = 25/5 + 15/5i$$

$$\alpha = 5 = 25/5$$

$$\beta = 3 = 15/5$$

$$\text{Вывод}: z_1 = z_2$$

Пример 2.

$$z_1 = 5 + 3i\ ;$$

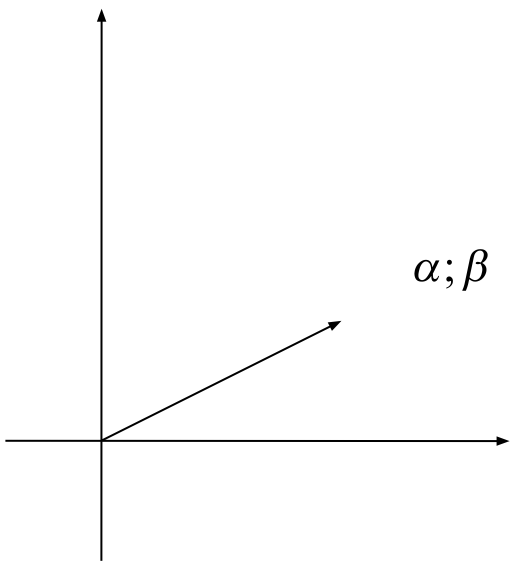
$$z_2 = 5 - 3i$$

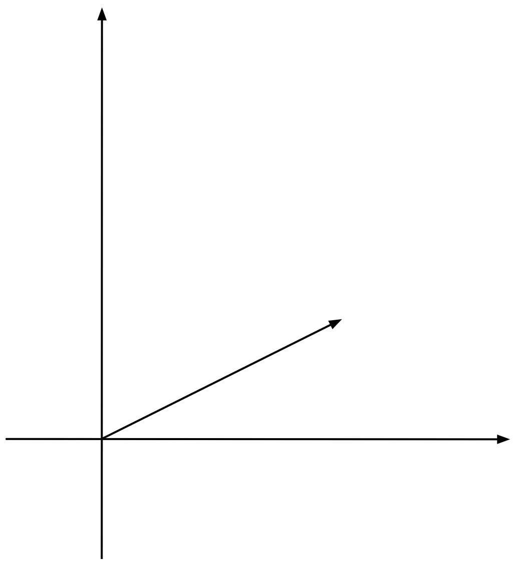
$\text{Вывод}: z_1\ и\ z_2$ комплексно - сопряженные числа.

Всякое комплексное число можно изобразить точкой плоскости xOy такой, что $x=\mathrm{Re}\ z$, $y=\mathrm{Im}\ z$.

И, наоборот, каждую точку координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа.

$$Z = \alpha+\beta i,\ M(\alpha,\ \beta)$$

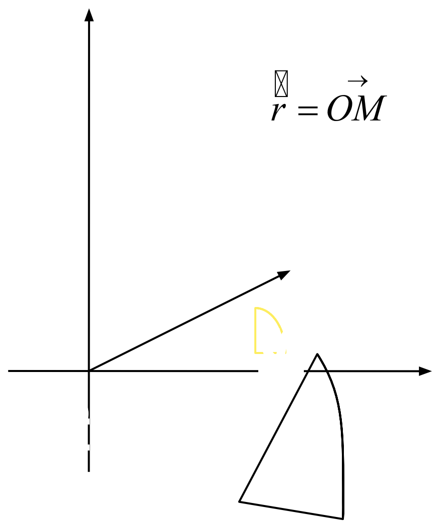




Плоскость, на которой изображается комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*.

Ось абсцисс Ох называется *действительной осью*.

Ось ординат Оу называется *мнимой осью*.



Комплексное число можно задавать с помощью радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Длина вектора называется <u>*модулем*</u> этого числа и обозначается $\phi Z \phi$или r .

Величина угла между положительным направлением оси Ox и вектором $\vec{r}$ называется <u>*аргументом*</u> этого комплексного числа и обозначается Arg Z или ϕ.

Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$.

~~1.~~

~~2.~~

~~3.~~

Модуль r и аргумент ϕ можно рассматривать как полярные координаты вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

Тогда получаем $x = r\cos\varphi$

$$y = r\sin\varphi$$

Комплексное число z=$\alpha+\beta i$ можно записать в виде

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$$

Или

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Запись числа

z=$\alpha+\beta i$

называется

алгебраической формой

комплексного числа.

Запись числа z в виде

z=r(cosφ+isinφ)

называется

тригонометрической формой

комплексного числа.

От тригонометрической формы к алгебраической

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\varphi = Arg\, z = \arg z + 2\pi k$$

$$\cos\varphi = \cos(\arg z + 2\pi k)$$

$$\sin\varphi = \sin(\arg z)$$

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$\varphi = \arg z$$

$$-\pi < \arg z \le \pi \qquad tg\varphi = \frac{y}{x}$$

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x} \;\; \text{для точек I и IV четвертей}; \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi \;\; \text{для точек II четверти}; \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi \;\; \text{для точек III четверти}. \end{cases}$$

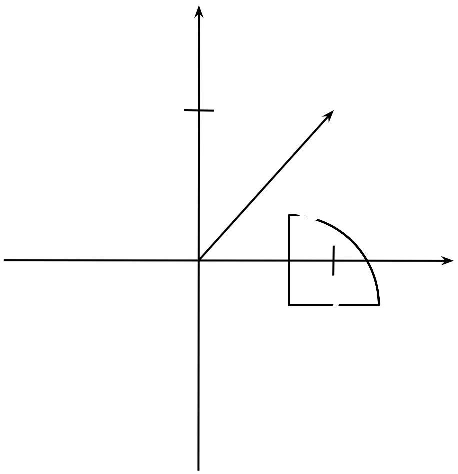
$$z = 2 + 2i$$

$x = 2$

$y = 2$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$



Для I четверти

$$\arg z = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{2}{2} = arctg1$$

$$\varphi = \arg z = \frac{\pi}{4}$$

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$z = re^{i\varphi}$$

$$r = |z|$$

$$\varphi = \arg z$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{i\varphi}$$

Суммой двух комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$

$$z_2 = x_2 + y_2 i$$

Называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

Разностью двух комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$

$$z_2 = x_2 + y_2 i$$

Называется комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 = 4 + 2i$$

$$z_2 = -5 + 3i$$

$$z_1 + z_2 = (4 - 5) + (2 + 3)i = -1 + 5i$$

$$z_1 = 3 - 5i$$

$$z_2 = 2 - 7i$$

$$z_1 - z_2 = (3 - 2) + (-5 - (-7)i = 1 + 2i$$

Произведением двух комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$

$$z_2 = x_2 + y_2 i$$

называется комплексное число

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i$$

Формула получается путем перемножения двучленов!

$$(x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i)$$

Частным двух комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + y_1 i$$

$$z_2 = x_2 + y_2 i$$

называется комплексное число

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$$

На практике используют умножение числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю!

$$\frac{(x_1 + y_1 i)}{(x_2 + y_2 i)} \frac{(x_2 - y_2 i)}{(x_2 - y_2 i)}$$

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = 3 + 4i$$

$$z_1 z_2 = (1 + 2i) \cdot (3 + 4i) =$$

$$= 1 \cdot 3 + 2i \cdot 3 + 1 \cdot 4i + 2i \cdot 4i =$$

$$= 4 + 6i + 4i + 8i^2 = 4 + 10i - 8 =$$

$$= -4 + 10i$$

$$z_1 z_2 = -4 + 10i$$

Частное:

$$z_1 = 1 + 2i$$

$$z_2 = 1 + i$$

$$\frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} =$$

$$= \frac{1+2i-i+2}{1+1} = \frac{3+i}{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Произведение чисел

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Находим по формуле

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

При умножении модули перемножаются, а аргументы складываются!

Частное чисел

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Находим по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

При делении модули делятся, а аргументы вычитаются!

Частное:

$$z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$z_2 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$z_1 z_2 = 3\cdot 5(\cos(\frac{\pi}{3} + \pi) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \pi))$$

$$z_1 z_2 = 15(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$$

$$z_1 = 3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$z_2 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5}(\cos(\frac{\pi}{3} - \pi) + i\sin(\frac{\pi}{3} - \pi))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{5}(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i\sin(-\frac{2\pi}{3}))$$

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$$

$$z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_1 z_2 = 6e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n}$$

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

$$\boxed{z^n = r^n e^{in\varphi}}$$

$$(1+\sqrt{3}i)^9$$

$$r=\sqrt{1+3}=2,$$

$$\arg z = arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3},$$

$$z=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$z^9=(1+\sqrt{3}i)^9=2^9(\cos 9\cdot\frac{\pi}{3}+i\sin 9\cdot\frac{\pi}{3})=$$

$$=2^9(\cos 3\pi+\sin 3\pi)=2^9\cdot(-1)=-512.$$

$$\omega^n = z$$

$$\sqrt[n]{z} = \omega$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$$

$\sqrt[6]{z}$ $\qquad z=-1$

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi$$

$$\sqrt[6]{-1}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}$$

$$k=0,\ z_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$k=1,\ z_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$$

$$k=2,\ z_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

$$k=3,\ z_1=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$k=4,\ z_1=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$$

$$k=5,\ z_1=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$