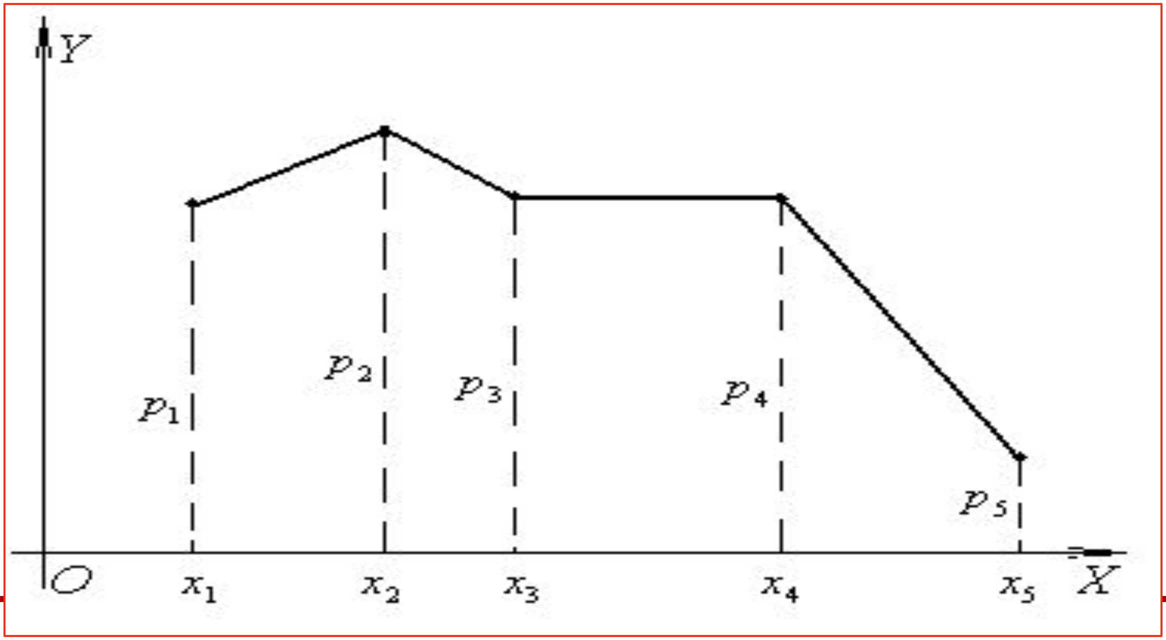
Лекция №2

Законы распределения случайных величин

1. Дискретные и непрерывные случайные величины
2. Характеристики случайных величин
3. Основные законы распределения случайных величин

- **Случайной величиной** называется величина, которая при осуществлении данного опыта принимает то или иное числовое значение, с какой-либо вероятностью.
- Случайная величина называется **дискретной**, если она принимает конечное или счетное множество значений.
- Случайная величина называется **непрерывной**, если она принимает все значения из некоторого конечного или бесконечного интервала.
- Любое правило, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется **законом распределения случайной величины**.

условие нормировки:



Непрерывная случайная величина задается с помощью: **интегральной функции распределения** вероятности

плотности распределения вероятности

Связь между ними:

Для непрерывных случайных величин также существует условие нормировки:

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, то есть $F(x) = P\{X < x\}$.

Свойства интегральной функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1 < x_2$, т.е. $F(x)$ – неубывающая функция.

3. $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

4. $P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$.

5. $F(x) = F(x-0)$, где $F(x-0) = \lim_{y\to x-0} F(y)$, т.е. $F(x)$ – непрерывная слева функция.

Свойства плотности вероятности

1. Дифференциальная функция распределения – неотрицательная, т.е. $f(x) \geq 0$.
2. Площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, равна единице.
3. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал $[a; b]$ равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от a до b: $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

Пример 1. Задана плотность вероятности случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2x, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащие интервалу $(0{,}5;\,1)$.

Решение. Искомая вероятность:

$$P(0{,}5 < X < 1) = 2\int_{0{,}5}^{1} x dx = x^2|_{0{,}5}^{1} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$$

Характеристики случайных величин

Числовые характеристики случайных величин количественно определяют различные свойства случайных величин. Они позволяет проводить сравнительный анализ случайных величин, давать оценку ожидаемым результатам опыта, находить связь и определять зависимость между различными случайными величинами и многое другое.

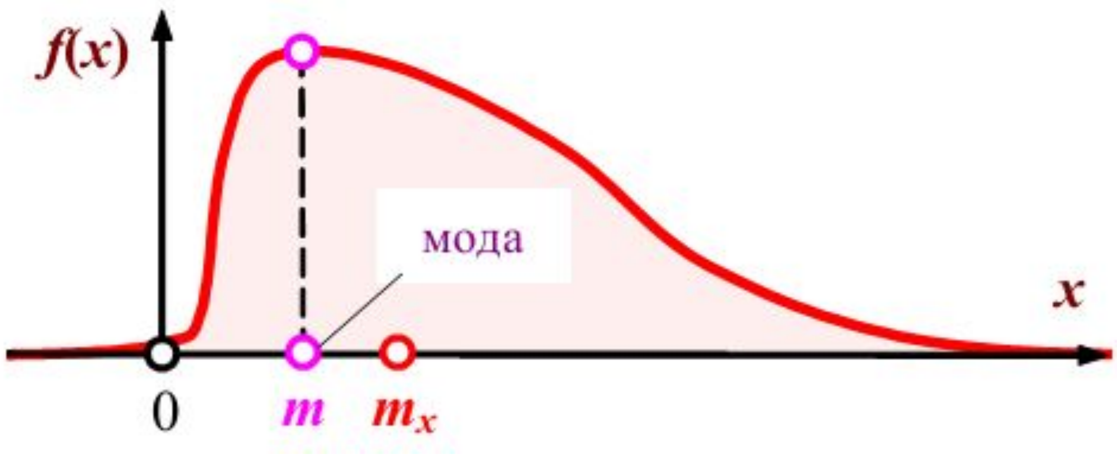
К числовым характеристикам случайной величины относятся:

- характеристики положения;
- характеристики разброса;
- характеристики формы.

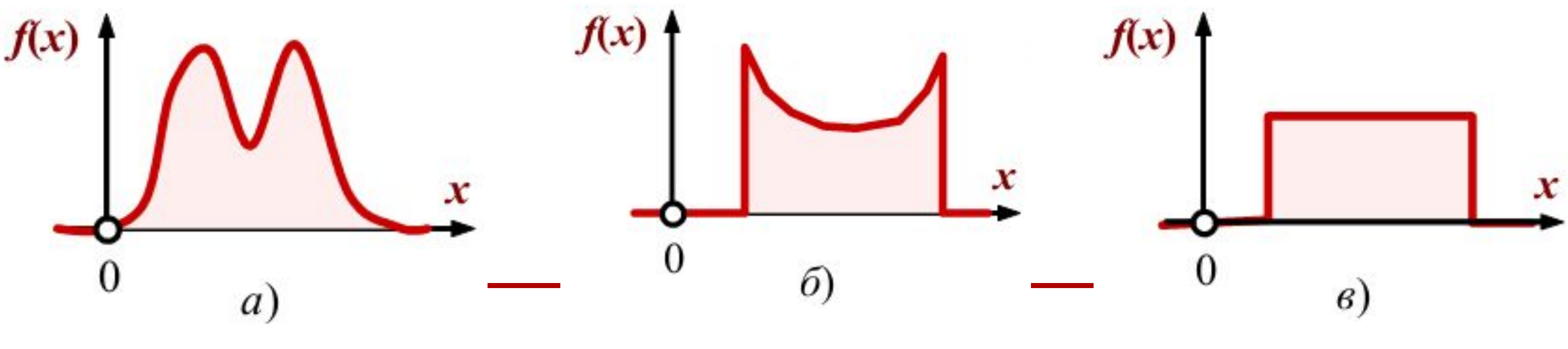
Характеристики положения
1. Математическое ожидание – это средневзвешенное по вероятностям значение случайной величины.
Для дискретной величины:

Для непрерывной величины:

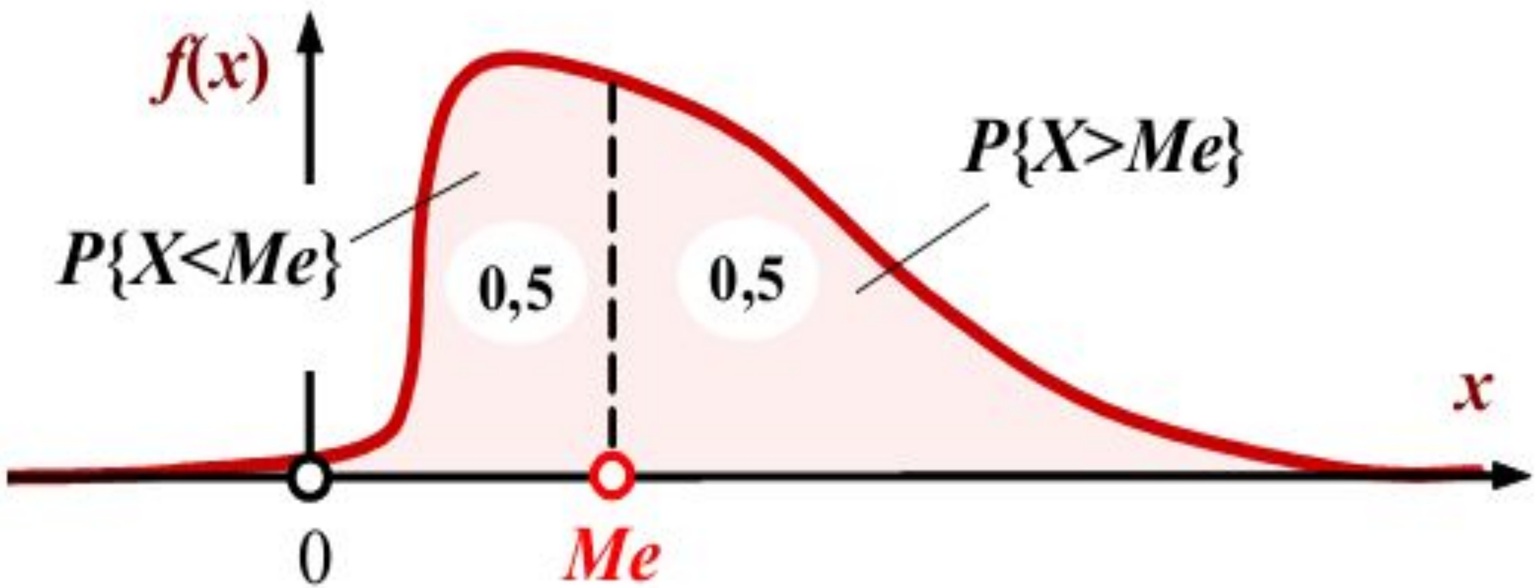
Мода (Мо) – наиболее вероятное значение случайной величины.



Бывают унимодальные (с одной модой), полимодальные (а), антимодальные (б) и безмодальные (в) распределения



Медиана – это такое значение случайной величины, для которого справедливо равенство:



Характеристики разброса

Дисперсия случайной величины – это математическое ожидание квадрата ее отклонения от своего математического ожидания.

Для дискретной величины:

Для непрерывной величины:

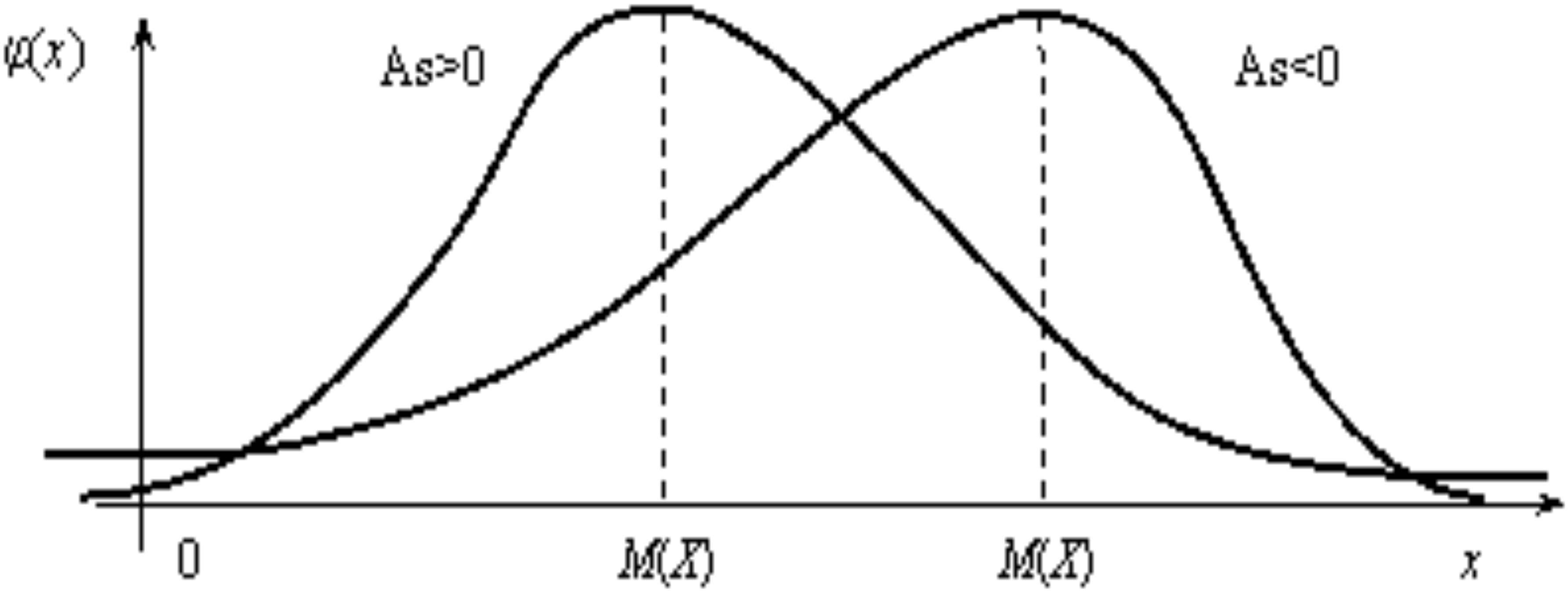
Среднее квадратическое отклонение или **стандартное отклонение –** это величина, равная квадратному корню из дисперсии:

Характеристики формы

Коэффициент асимметрии («скошенности»)

Где M_3 - третий центральный момент.
Для дискретной величины:

Для непрерывной величины:



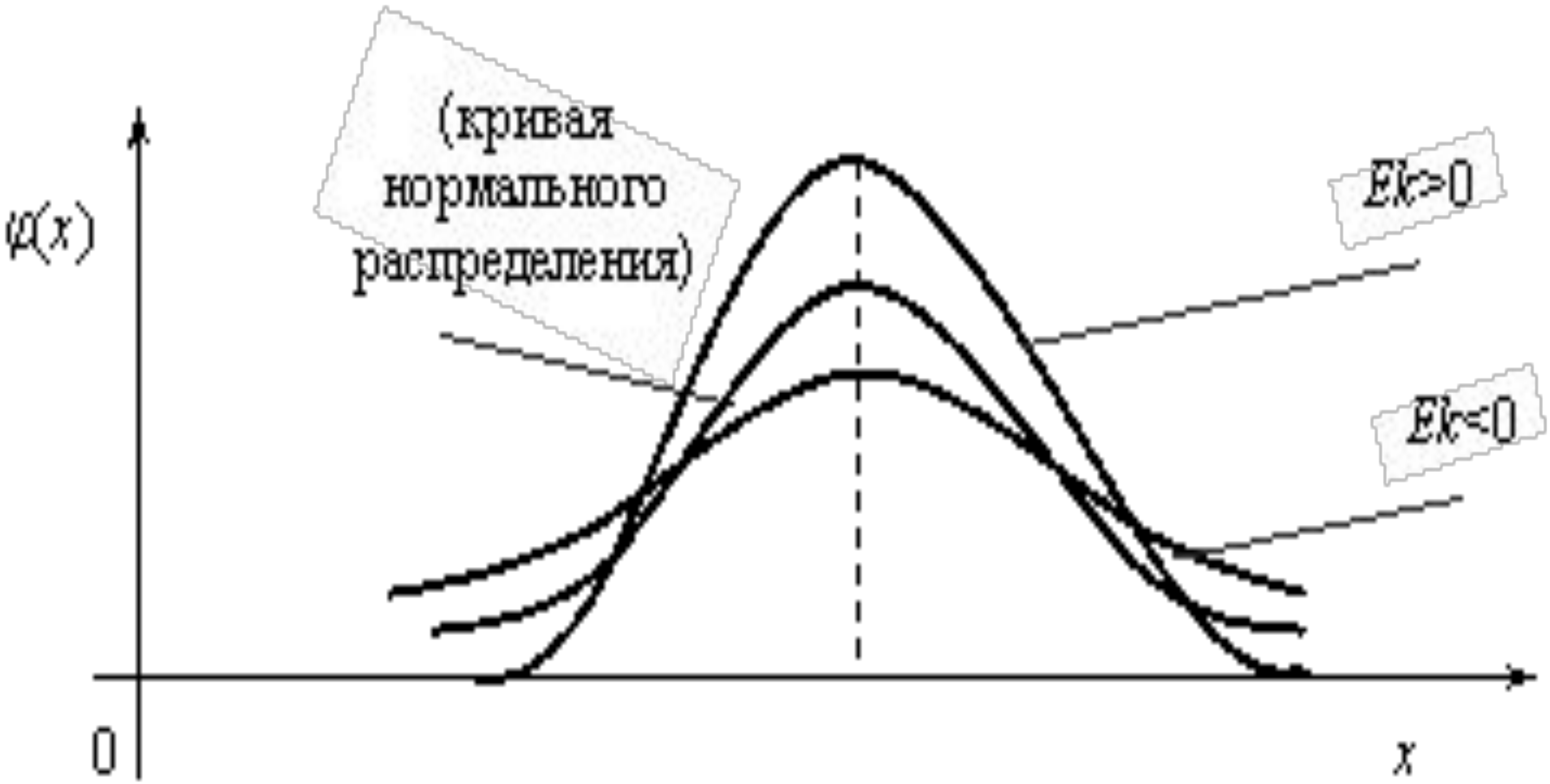
φ(x)
As>0
As<0
0
M(X)
M(X)
x

Эксцесс–это величина, равная

где M_4 – четвертый центральный момент.

Для дискретной величины:

Для непрерывной величины:


(кривая
нормального
распределения)
$Ek>0$
$Ek<0$
$\varphi(x)$
0
x

Законы распределения случайных величин

Законы распределения дискретных случайных величин

Биномиальное распределение

Распределение Пуассона

Геометрическое распределение

Гипергеометрическое распределение

Математическое ожидание дискретной случайной величины, распределенной по биномиальному закону, равняется произведению числа всех испытаний на вероятность наступления события в отдельном испытании, то есть $\boxed{M(X)=n\cdot p}$

Дисперсия равняется произведению числа всех испытаний на вероятность наступления и не наступления события в отдельном испытании, то есть $\boxed{D(X)=n\cdot p\cdot q}$

Законы распределения непрерывных случайных величин

Нормальное распределение (распределение Гаусса)

Распределение «Хи-квадрат»

Распределение Стьюдента

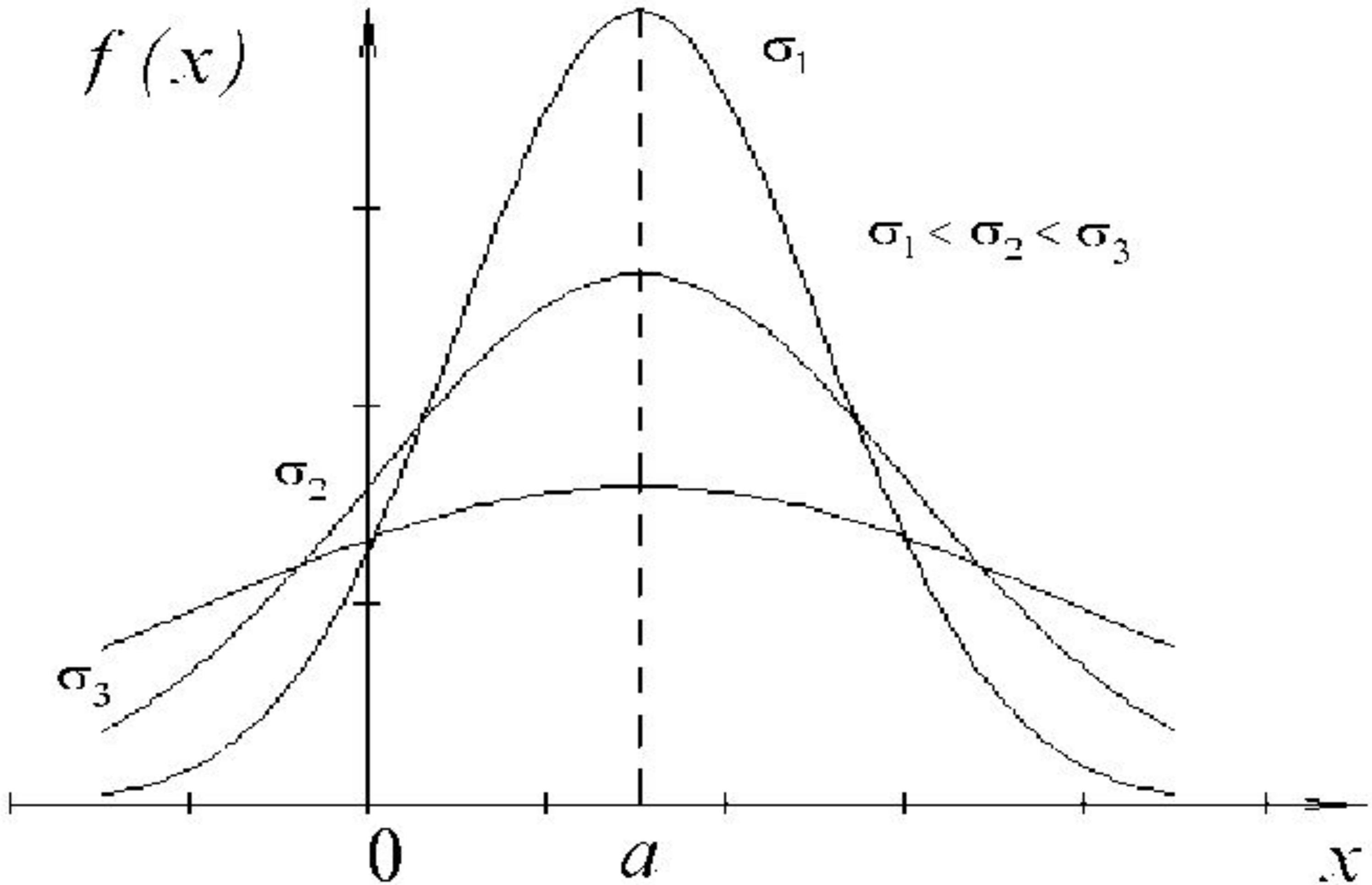
Распределение Фишера-Снедекора

Нормальный закон распределения задается дифференциальной функцией:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

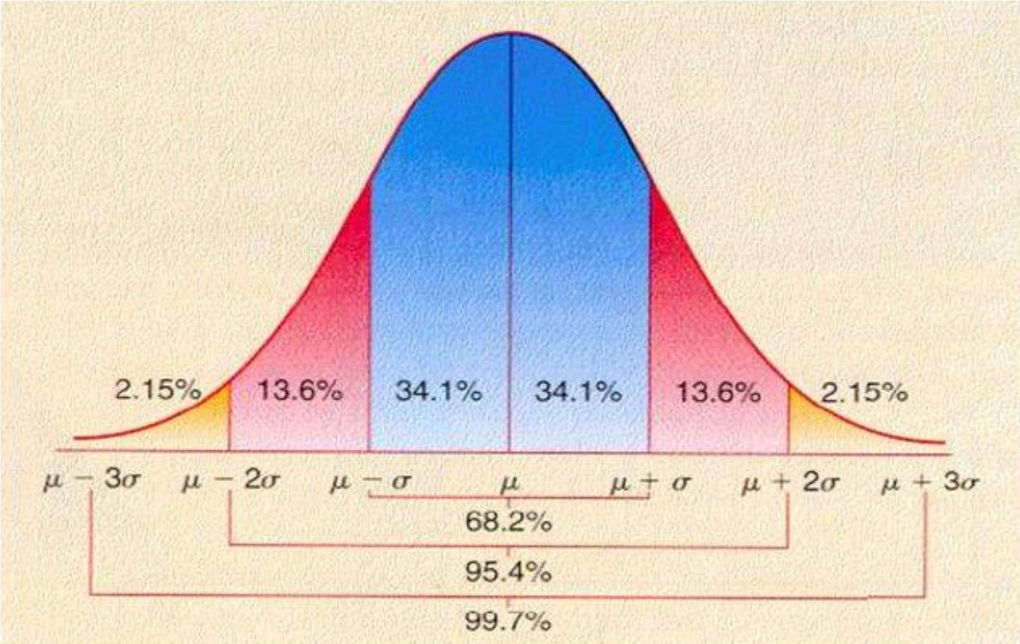
Параметры $a = M(x)$ $\sigma^2 = D(x)$

являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины распределенной по нормальному закону



$f(x)$
σ_1
$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$
σ_2
σ_3
0
a
x

Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777—1855).
Немецкий математик, механик, физик, астроном. Считается одним из величайших математиков всех времён, «королём математиков»



Отклонение значения нормально распределённой случайной величины X от её математического ожидания не превосходит утроенного среднеквадратического отклонения с вероятностью около 0,997

Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), равна:

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx\,.$$

- Введем новую переменную $z = \frac{x-a}{\sigma}$. Отсюда, $x = \sigma z + a$, $dx = \sigma dz$.

Если $x = \alpha$, то $z = \frac{\alpha-a}{\sigma}$; если $x = \beta$, то $z = \frac{\beta-a}{\sigma}$.

Пользуясь функцией Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, получим

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Пример 2. Случайная величина X распределена по нормальному закону с $M(x) = 30$ и $\sigma(x) = 10$. Найти вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу .

Решение.

$$P(10 < x < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2)$$

По таблице приложения находим $\Phi(2) = 0{,}4772.$

Отсюда искомая вероятность:

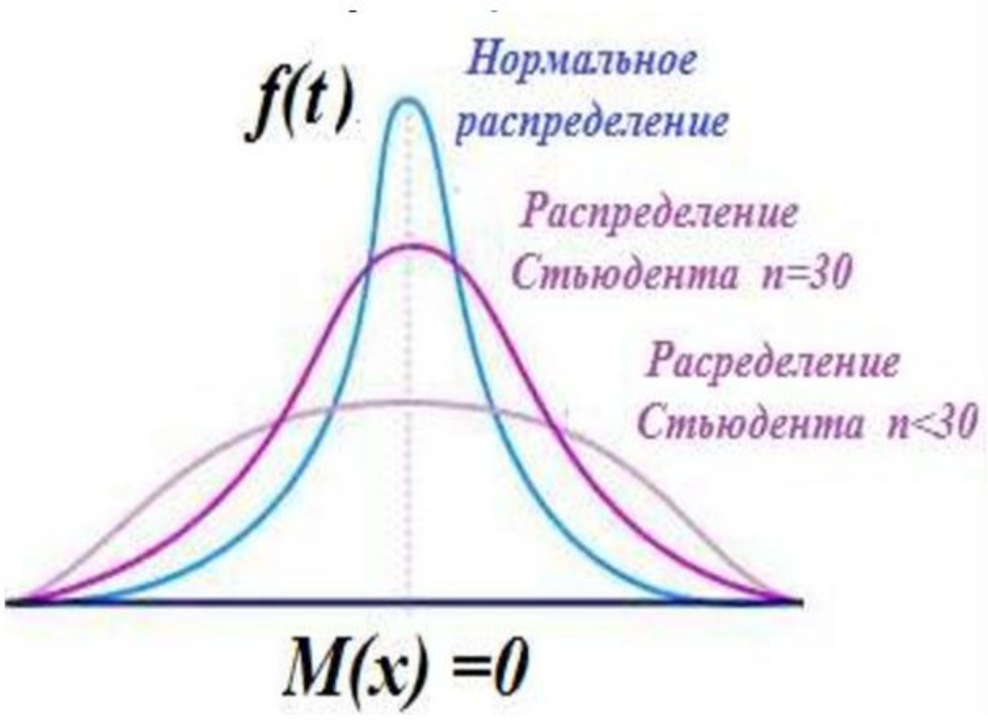
$$P(10 < x < 50) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

ТАБЛИЦА ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

x	φ(x)	x	φ(x)	x	φ(x)
0,00	0,0000	1,00	0,3413	2,00	0,4772
0,05	0,0199	1,05	0,3531	2,05	0,4798
0,10	0,0398	1,10	0,3643	2,10	0,4821
0,15	0,0596	1,15	0,3749	2,15	0,4842
0,20	0,0793	1,20	0,3849	2,20	0,4861
0,25	0,0987	1,25	0,3943	2,25	0,4878
0,30	0,1179	1,30	0,4032	2,30	0,4893
0,35	0,1368	1,35	0,4115	2,35	0,4906
0,40	0,1554	1,40	0,4192	2,40	0,4918
0,45	0,1736	1,45	0,4265	2,45	0,4929
0,50	0,1915	1,50	0,4332	2,50	0,4938
0,55	0,2088	1,55	0,4394	2,55	0,4946
0,60	0,2257	1,60	0,4452	2,60	0,4953
0,65	0,2421	1,65	0,4505	2,65	0,4960
0,70	0,2580	1,70	0,4554	2,70	0,4965
0,75	0,2734	1,75	0,4599	2,80	0,4974
0,80	0,2881	1,80	0,4641	2,90	0,4981
0,85	0,3023	1,85	0,4678	3,00	0,4986
0,90	0,3159	1,90	0,4713	3,50	0,4998
0,95	0,3289	1,95	0,4744	4,00	0,4999

Уильям Сили Госсет – британский учёный, статистик, более известный под своим псевдонимом Стьюдент (Student)



Распределение Фишера-Снедекора (F-распределение)

Пусть U и V – независимые случайные величины, распределенные по закону χ^2 со степенями свободы k_1 и k_2.

Тогда величина $F = \frac{U/k_1}{V/k_2}$ имеет распределение, которое называется **распределением Фишера-Снедекора** со степенями свободы k_1 и k_2. Плотность распределения Фишера-Снедекора со степенями свободы k_1 и k_2 имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right) \cdot k_1^{\frac{k_1}{2}} \cdot k_2^{\frac{k_2}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)} \cdot \dfrac{x^{\frac{k_1-2}{2}}}{(k_2 + k_1 x)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & x > 0 \end{cases}$$

F-распределение является асимметричным и обычно используется в дисперсионном анализе.

Математическая статистика – это раздел математики, изучающий методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений с целью выявления статистических закономерностей.

Основные задачи математической статистики

1. Создание методов сбора данных
2. Разработка методов анализа полученных статистических данных
3. Получение выводов по данным наблюдений

Генеральная совокупность – это множество значений, которые может принимать случайная величина. Число всех наблюдений, составляющих генеральную совокупность, называется ее **объемом**

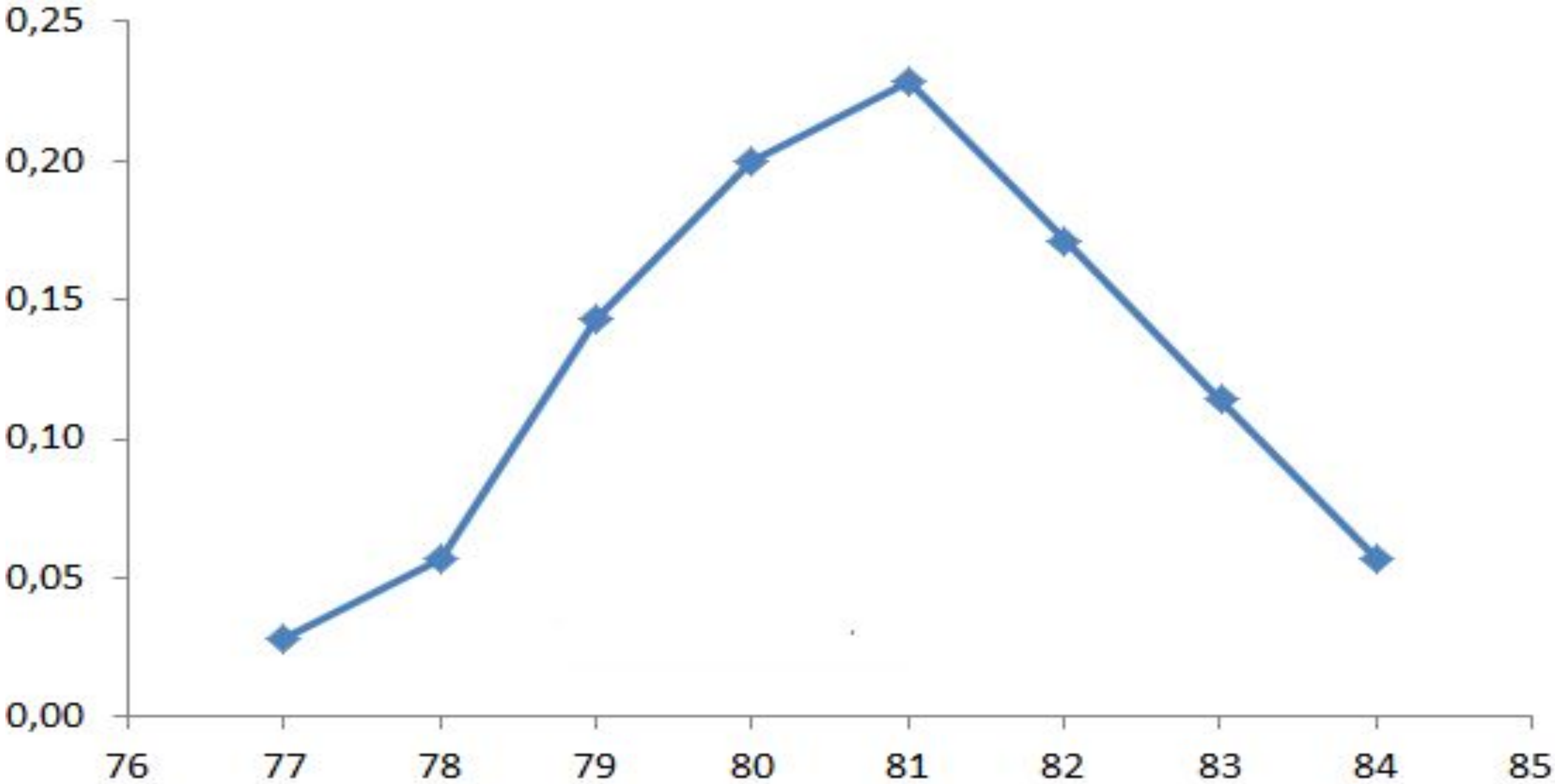
Выборка (выборочная совокупность) – это множество статистических наблюдений, составляющих часть генеральной совокупности, отобранную случайным образом. Объем выборки обозначается *n*.

Выборка обязательно должна удовлетворять условию **репрезентативности**

Для наглядного представления статистического распределения пользуются графическим изображением вариационных рядов: **полигоном частот** и **гистограммой**.

Полигон частот (многоугольник распределения) – ломаная линия, состоящая из отрезков, соединяющих точки с координатами

$$\omega_1 = \frac{1}{35} = 0{,}03; \omega_2 = \frac{2}{35} = 0{,}06; \ \omega_3 = \frac{5}{35} = 0{,}14; \omega_4 = \frac{7}{35} = 0{,}20; \omega_5 = \frac{8}{35}$$
$$= 0{,}23; \omega_6 = \frac{6}{35} = 0{,}16; \ \omega_7 = \frac{4}{35} = 0{,}12; \omega_7 = \frac{2}{35} = 0{,}06.$$


0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,00
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85

Гистограмма частот – это ступенчатая фигура, состоящая из смежных прямоугольников, построенных на одной прямой, основания которых одинаковы и равны ширине класса, а высота равна частоте попадания в интервал

Ширину интервала можно определить по формуле Стерджеса:

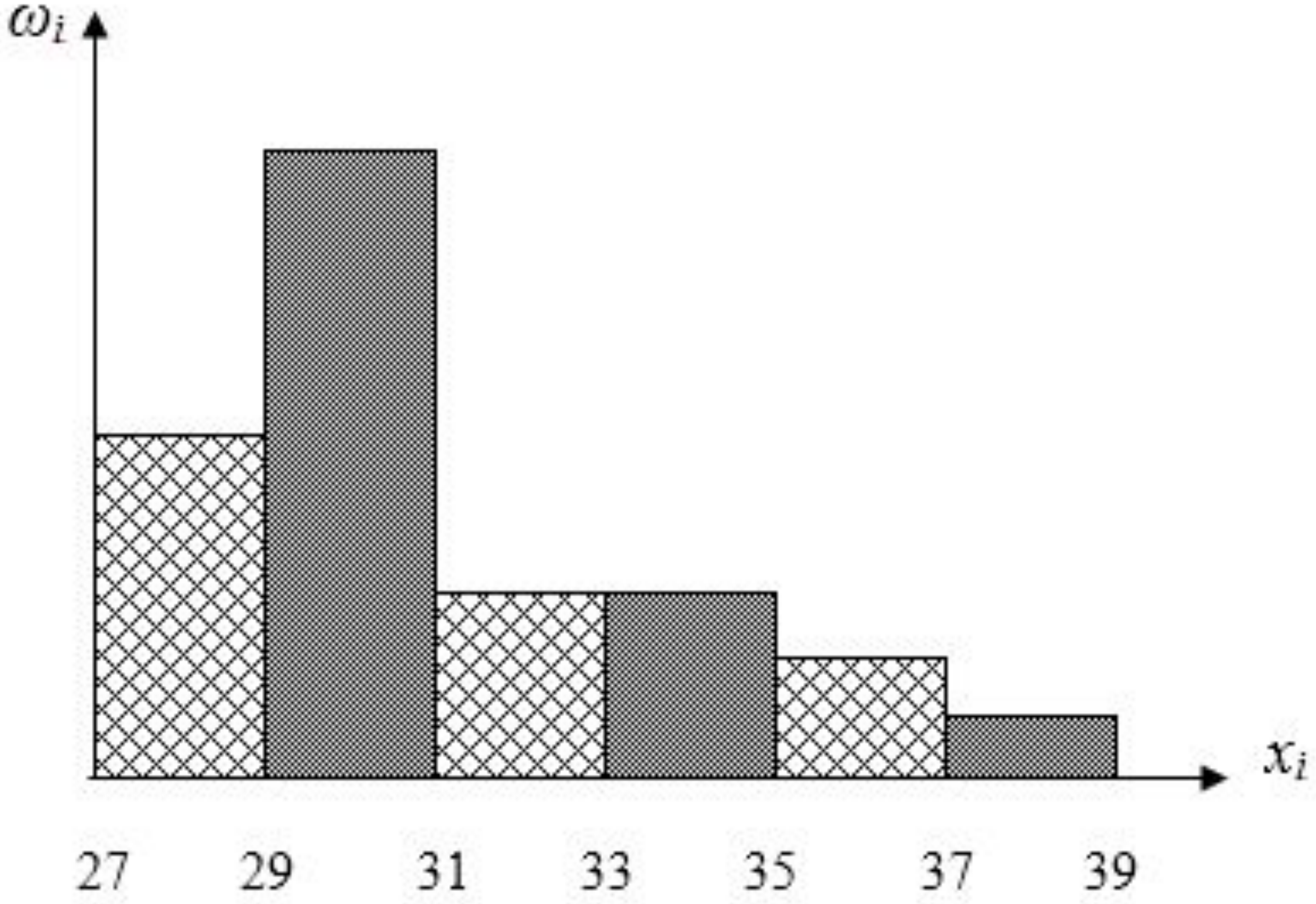
$$k = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3{,}322 lgn}$$

Пример 3. Наблюдения за числом студентов, посещающих методический кабинет на протяжении месяца, дали следующие результаты: 27; 30; 39; 31; 32; 34; 36; 30; 28; 30; 33; 34; 31; 30; 31; 33; 31; 27; 31; 37; 31; 34; 27; 30; 28; 30; 28; 30. Построить по этим данным интервальный вариационный ряд и начертить гистограмму

$$x_{max} = 39, x_{min} = 27, n = 28.$$

$$k = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3{,}322 lgn} = \frac{39 - 27}{1 + 3.322 lg28} = \frac{12}{5{,}8} = 2$$

x	(27; 29)	(29;31)	(31;33)	(33;35)	(35;37)	(37;39)
n	6	13	3	3	2	1
$\omega_i = \frac{n_i}{n}$	0,21	0,47	0,11	0,11	0,07	0,03


ω_i
x_i
27
29
31
33
35
37
39