1. На счет, который вкладчик имел в начале первого квартала, начисляется в конце этого квартала r_1 процентов, а на тот счет, который вкладчик имел в конце второго квартала, начисляется в конце этого квартала r_2 процентов, причем $r_1 + r_2 = 150$. Вкладчик положил на счет в начале первого квартала некоторую сумму и снял в конце того же квартала половину этой суммы. При каком значении r_1 счет вкладчика в конце второго квартала окажется максимально возможным? (МГУ, ИСАА, 3(6), 1995)

Пусть вкладчик положил на счет в начале первого квартала А у.е.

$$\underbrace{\left(A\left(1+\frac{r_1}{100}\right)-\frac{A}{2}\right)}_{\text{сумма в конце I квартала}}\cdot\left(1+\frac{r_2}{100}\right)$$

сумма в конце II квартала

$$S(r_1)=\left(A\left(1+\frac{r_1}{100}\right)-\frac{A}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{150-r_1}{100}\right)\to max, 0<r_1<150$$

$$S(r_1)=\left(\frac{A}{2}+\frac{A\cdot r_1}{100}\right)\left(\frac{100+150-r_1}{100}\right)=\left(\frac{50A+A\cdot r_1}{100}\right)\left(\frac{250-r_1}{100}\right)=\frac{A}{10000}(50+r_1)(250-r_1)$$

$$S(r_1)=-\frac{A}{10000}(r_1+50)(r_1-250)$$

$$r_{max}=\frac{-50+250}{2}=100$$

Ответ: 100%

2. Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $4500/n + 270 - |90 - 40500/n|$ тыс. руб., а цена реализации каждого телевизора при этом не превосходит $540 - 3\,n/10$ тыс. руб. Определите ежемесячный объем производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях ежемесячная прибыль. (МГУ, Экономический ф-т, 5(6), 1994)

$R(n) \geq n \cdot \left(\frac{4500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right|\right)$ – ежемесячные расходы.

$$R(n) \geq 4500 + 270n - 90|n - 450| \ (1)$$

$S(n) \leq n \cdot \left(540 - \frac{3n}{10}\right)$ –ежемесячная сумма, полученная от реализации телевизоров.

$$S(n) \leq 540n - \frac{3n^2}{10} \quad (2)$$

$$P(n) = S(n) - R(n)$$

Ответ: 300 или 600 телевизоров.

$$-R(n) \leq -4500 - 270n + 90|n - 450| \ (3)$$

$$P(n) = S(n) - R(n) \leq 540n - \frac{3n^2}{10} - 4500 - 270n + 90|n - 450|$$

$$P(n) \leq -\frac{3n^2}{10} - 4500 + 270n + 90|n - 450|$$

$$n_0 = -\frac{b}{2a}$$

1. $n \geq 450$ $\quad n_{max} = -\dfrac{270 + 90}{2 \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)} = 600;$

2. $n < 450$ $\quad n_{max} = -\dfrac{270 - 90}{2 \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)} = 300;$

3. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго типа. Для 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго типа соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир было наибольшим?(МГУ, Экономический ф-т, 5(6), 1984)

Пусть соберут x 12-квартирных домов, y 16-квартирных домов, z домов на 21 квартиру.

В этих домах $S = 12x + 16y + 21z$ квартир.

Для постройки потребуется $70x + 110y + 150z \leq 900$ деталей первого типа

и $100x + 150y + 200z \leq 1300$ деталей второго типа.

$$\begin{cases} S = 12x + 16y + 21z \to max \\ 70x + 110y + 150z \leq 900 \\ 100x + 150y + 200z \leq 1300 \end{cases}; \quad \begin{cases} S = 12x + 16y + 21z \to max \\ 7x + 11y + 15z \leq 90 \\ 2x + 3y + 4z \leq 26 \end{cases};$$

Для сборки двух 12-квартирных домов (24 квартиры) нужно 140 деталей первого типа и 200 деталей второго.

$z = 0$

$$\begin{cases} S = 12x + 16y \to max \\ 7x + 11y \leq 90 \\ 2x + 3y \leq 26 \end{cases};$$

	К-во деталей I типа на 1 квартиру	К-во деталей II типа на 1 квартиру
12-квартирный дом	$\frac{70}{12} = 5\frac{5}{6}$	$\frac{100}{12} = 8\frac{1}{3}$
16-квартирный дом	$\frac{110}{16} = 6\frac{7}{8}$	$\frac{150}{16} = 9\frac{3}{8}$

3. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго типа. Для 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго типа соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир было наибольшим?(МГУ, Экономический ф-т, 5(6), 1984)

$$\begin{cases} S = 12x + 16y \to max \\ 7x + 11y \le 90 \\ 2x + 3y \le 26 \quad | \cdot 3{,}5 \end{cases}; \quad \begin{cases} S = 12x + 16y \to max \\ 7x + 11y \le 90 \\ 7x + 10{,}5y \le 91 \end{cases}; \quad \begin{cases} S = 12x + 16y \to max \\ x \le \dfrac{90 - 11y}{7} \\ x \le \dfrac{91 - 10{,}5y}{7} \end{cases}; \quad \begin{cases} S = 12x + 16y \to max \\ x \le \dfrac{90 - 11y}{7} \end{cases};$$

1. $y = 0;$

$x \le \frac{90}{7};\ x = 12$

$S = 12 \cdot 12 = 144$ кв.

2. $y = 1;$

$x \le \frac{79}{7};\ x = 11$

$S = 12 \cdot 11 + 16 = 148$ кв.

3. $y = 2;$

$x \le \frac{68}{7};\ x = 9$

$S = 12 \cdot 9 + 16 \cdot 2 = 140$ кв.

4. $y = 3;$

$x \le \frac{57}{7};\ x = 8$

$S = 12 \cdot 8 + 16 \cdot 3 = 144$ кв.

Ответ: 16-квартирных дома: 1;
12-квартирных дома: 11;
21-квартирных дома: 0.

4. С завода на стройку нужно перевезти **24** больших и **510** маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает в себя **44** маленьких блока и имеет грузоподъемность **10** тонн. Вес маленького блока - **0, 2** тонны, большой блок весит **3,6** тонны и занимает место **14** маленьких. Найти минимальное число рейсов. (МГУ, ВМиК, 5(6), 1987)

Пусть в одну машину помещается a больших и b маленьких блоков.

$14a + b \leq 44$ $\qquad$ $3{,}6a + 0{,}2b \leq 10$

$a = 0, b = 44$ $\qquad$ Вес $0{,}2 \cdot 44 = 8{,}8$ тонны

$a = 1, b = 30$ $\qquad$ Вес $3{,}6 + 0{,}2 \cdot 30 = 9{,}6$ тонны $\qquad$ (1)

$a = 2, b = 16$ $\qquad$ Вес $2 \cdot 3{,}6 + 0{,}2 \cdot 16 = 10{,}4$ тонны

$a = 2, b = 14$ $\qquad$ Вес 10 тонн $\qquad$ (2)

Пусть было совершено x рейсов с загрузкой (1) и y рейсов с загрузкой (2)

$$\begin{cases} x + y \to min \\ x + 2y \geq 24 \\ 30x + 14y \geq 510 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x + y \to min \\ x + 2y \geq 24 \\ 15x + 7y \geq 255 \end{cases};$$

4. С завода на стройку нужно перевезти **24** больших и **510** маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает в себя **44** маленьких блока и имеет грузоподъемность **10** тонн. Вес маленького блока - **0, 2** тонны, большой блок весит **3,6** тонны и занимает место **14** маленьких. Найти минимальное число рейсов. (МГУ, ВМиК, 5(6), 1987)

$$\begin{cases} x + y \to min \\ x + 2y \geq 24 \\ 15x + 7y \geq 255 \end{cases};$$

$$x = 17; \begin{cases} y \geq \dfrac{255 - 15 \cdot 17}{7} \\ y \geq \dfrac{24 - 17}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ y \geq 3{,}5 \end{cases}; \quad \begin{matrix} x = 17; y = 4 \\ x + y = 21 \end{matrix}$$

$$x = 16; \begin{cases} y \geq \dfrac{255 - 15 \cdot 16}{7} \\ y \geq \dfrac{24 - 16}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} y \geq \dfrac{15}{7} \\ y \geq 4 \end{cases}; \quad \begin{matrix} x = 16; y = 4 \\ x + y = 20 \end{matrix}$$

$$x = 15; \begin{cases} y \geq \dfrac{255 - 15 \cdot 15}{7} \\ y \geq \dfrac{24 - 15}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} y \geq \dfrac{30}{7} \\ y \geq 4{,}5 \end{cases}; \quad \begin{matrix} x = 15; y = 5 \\ x + y = 20 \end{matrix}$$

$$x = 14; \begin{cases} y \geq \dfrac{255 - 15 \cdot 14}{7} \\ y \geq \dfrac{24 - 14}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} y \geq \dfrac{45}{7} \\ y \geq 5 \end{cases}; \quad \begin{matrix} x = 14; y = 7 \\ x + y = 21 \end{matrix}$$

$$x = 13; \begin{cases} y \geq \dfrac{255 - 15 \cdot 13}{7} \\ y \geq \dfrac{24 - 13}{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} y \geq \dfrac{60}{7} \\ y \geq 5{,}5 \end{cases}; \quad \begin{matrix} x = 13; y = 9 \\ x + y = 23 \end{matrix}$$

Ответ: 20 рейсов.

5. Цех получил заказ на изготовление **2000** деталей типа **А** и **14000** деталей типа **Б**. Каждый из **146** рабочих цеха затрачивает на изготовление одной детали типа **А** время, за которое он мог бы изготовить 2 детали типа **Б**. Каким образом следует разделить рабочих цеха на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно, и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа. (МГУ, Экономический ф-т, 3(6), 1992)

Пусть на изготовление 1 детали типа А одним рабочим требуется время t,
тогда на изготовление 1 детали типа Б одним рабочим требуется время $\frac{t}{2}$.
Тогда на изготовление 2000 деталей типа А одним рабочим требуется время $2000t$,
и на изготовление 14000 деталей типа Б одним рабочим - время $14000 \cdot \frac{t}{2} = 7000t$.
146 рабочих необходимо распределить по бригадам в отношении $2:7$. $2x + 7x = 9x;\ 9x = 146$

$x = 16\frac{2}{9}, \qquad 2x = 32\frac{4}{9}$

Ответ:
в первой бригаде 33 рабочих;
во второй – 113 рабочих.

1. В первой бригаде 32 рабочих, во второй $146 - 32 = 114$ рабочих.

Первая бригада затратит на изготовление 2000 деталей типа А время $\frac{2000t}{32} = 62\frac{1}{2}t$

Вторая бригада затратит на изготовление 14000 деталей типа Б время $\frac{7000 \cdot t}{114} = 61\frac{23}{57}t$

2. В первой бригаде 33 рабочих, во второй $146 - 33 = 113$ рабочих

Первая бригада затратит на изготовление 2000 деталей типа А время $\frac{2000t}{33} = 60\frac{20}{33}t$

Вторая бригада затратит на изготовление 14000 деталей типа Б время $\frac{7000 \cdot t}{113} = 61\frac{107}{113}t$

6. Строительной организации необходимо построить некоторое количество одинаковых домов общей площадью **2500** м^2. Стоимость одного дома площадью a м^2 складывается из стоимости материалов $p_1 a^{3/2}$ тыс. руб., стоимости строительных работ $p_2 a$ тыс. руб., и стоимости отделочных работ $p_3 a^{1/2}$. Числа p_1, p_2, p_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии, их сумма равна **21**, а их произведение равно **64**. Если построить **63** дома, то затраты на материалы будут меньше, чем затраты на на строительные и отделочные ~~работы.~~
~~Сколько следует построить домов, чтобы общие затраты были минимальными. (МГУ, ВМиК, 5(6), 19~~95)

$$S(n) = n(p_1 a^{3/2} + p_2 a + p_3 a^{1/2}); \quad a = \frac{2500}{n}, \quad n$$ — количество построенных домов.

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 21 \\ p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 64 \end{cases}; \quad \begin{cases} p_1 + p_1 q + p_1 q^2 = 21 \\ p_1 \cdot p_1 q \cdot p_1 q^2 = 64 \end{cases}; \quad \begin{cases} p_1(1 + q + q^2) = 21 \\ p_1^3 q^3 = 64 \end{cases}; \quad \begin{cases} p_1(1 + q + q^2) = 21 \\ p_1 q = 4 \end{cases};$$

$$\frac{1 + q + q^2}{q} = \frac{21}{4}; \quad 4q^2 - 17q + 4 = 0; \quad q = \frac{1}{4}; \quad p_1 = 16; p_2 = 4; p_3 = 1$$

$$q = 4; \quad p_1 = 1; p_2 = 4; p_3 = 16$$

$$1.\ q = \frac{1}{4}: \ p_1 = 16; p_2 = 4; \ p_3 = 1; \qquad a = \frac{2500}{63};$$

$$16\left(\frac{2500}{63}\right)^{3/2} < 4\left(\frac{2500}{63}\right) + \left(\frac{2500}{63}\right)^{1/2} \ (1); \quad 4\left(\frac{2500}{63}\right)^{3/2} > 4\left(\frac{2500}{63}\right); \quad \left(\frac{2500}{63}\right)^{3/2} > \left(\frac{2500}{63}\right)^{1/2}$$ Неравенство (1) неверное.

$$2.\ q = 4 \qquad p_1 = 1; p_2 = 4; p_3 = 16$$

$$S(n) = n\left(\left(\frac{2500}{n}\right)^{3/2} + 4\left(\frac{2500}{n}\right) + 16\left(\frac{2500}{n}\right)^{1/2}\right) \to min$$

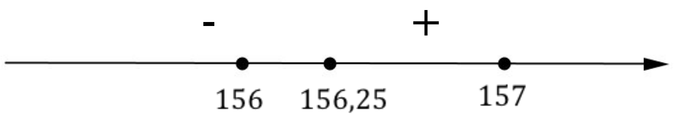
6. Строительной организации необходимо построить некоторое количество одинаковых домов общей площадью **2500** м^2. Стоимость одного дома площадью $\boldsymbol{a}$ м^2 складывается из стоимости материалов $\boldsymbol{p_1 a^{3/2}}$ тыс. руб., стоимости строительных работ $\boldsymbol{p_2 a}$ тыс. руб., и стоимости отделочных работ $\boldsymbol{p_3 a^{1/2}}$. Числа p_1, p_2, p_3 являются последовательными членами геометрической прогрессии, их сумма равна **21**, а их произведение равно **64**. Если построить **63** дома, то затраты на материалы будут меньше, чем затраты на на строительные и отделочные работы. Сколько следует построить домов, чтобы общие затраты были минимальными. (МГУ, ВМиК, 5(6), 1995)

$$S(n) = n((\frac{2500}{n})^{3/2} + 4(\frac{2500}{n}) + 16(\frac{2500}{n})^{1/2}) \to min$$

$$S(n) = 125000n^{(-\frac{1}{2})} + 10000 + 800n^{1/2}$$

$$S'(n) = 125000\left(-\frac{1}{2}\right)n^{\left(-\frac{3}{2}\right)} + 800(\frac{1}{2})n^{(-\frac{1}{2})} = -62500n^{\left(-\frac{3}{2}\right)} + 400n^{(-\frac{1}{2})} = 100n^{\left(-\frac{3}{2}\right)}(-\frac{1250}{2} + 4n)$$

$$100n^{\left(-\frac{3}{2}\right)}\left(-\frac{1250}{2} + 4n\right) = 0; \quad n = \frac{1250}{8} = 156,25$$



$$1. n = 156, \quad S(156) = 125000 \cdot 156^{(-\frac{1}{2})} + 10000 + 800 \cdot 156^{1/2}$$

$$2. n = 157, \quad S(157) = 125000 \cdot 157^{(-\frac{1}{2})} + 10000 + 800 \cdot 157^{1/2}$$

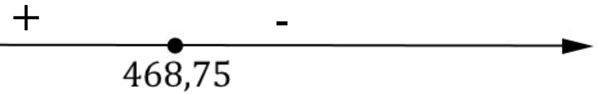
$$S(156) < S(157)$$

Вторая производная показывает, с какой скоростью изменяется скорость функции.

$$S''(n) = -62500 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)n^{\left(-\frac{5}{2}\right)} + 400 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)n^{\left(-\frac{3}{2}\right)} = 93750n^{\left(-\frac{5}{2}\right)} - 200n^{\left(-\frac{3}{2}\right)} = n^{\left(-\frac{5}{2}\right)}(93750 - 200n)$$

$$n = \frac{93750}{200} = 468,75$$

Функция изменяется быстрее



Ответ: 156 домов.

7. В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес одного изделия составляют **400** тыс. руб. и **12** кг для первого типа, **500** тыс. руб. и **16** кг для второго типа, **600** тыс. руб. и **15** кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен **326** кг. Определите минимальную и максимальную возможную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий. (МГУ, Экономический ф-т, 4(6), 1996)

Пусть было x изделий первого типа, y изделий второго типа и z изделий третьего типа.

$12x + 16y + 15z = 326$ $S = 400x + 500y + 600z$

Стоимость 1 кг изделия первого типа: $\frac{400}{12} = 33\frac{1}{3}$ руб/кг

Стоимость 1 кг изделия второго типа: $\frac{500}{16} = 31{,}25$ руб/кг

Стоимость 1 кг изделия третьего типа: $\frac{600}{15} = 40$ руб/кг

Ответ: $S_{max} = 12600$ **тыс. руб.**
$S_{min} = 10500$ **тыс. руб.**

$1.\ S = 400x + 500y + 600z \to max$ $z \to x \to y$

z - четное число: $z = 20;\ 12x + 16y = 26$

$z = 18;\ 12x + 16y = 56$ $x = 2;\ y = 2$

$S = 400 \cdot 2 + 500 \cdot 2 + 600 \cdot 18 = 1800 + 10800 = 12600$ тыс. руб.

$2.\ S = 400x + 500y + 600z \to min$ $y \to x \to z$

$y = 20;\ 12x + 15z = 6;$ $y = 19;\ 12x + 15z = 22;$ $y = 18;\ 12x + 15z = 38;$

$y = 17;\ 12x + 15z = 54,$ $z = 2; x = 2.$ $S = 400 \cdot 2 + 500 \cdot 17 + 600 \cdot 2 = 2000 + 8500 = 10500$ тыс. руб.

8. Бригада рабочих выполняет задание за **42** дня. Если бы в бригаде было на **4** человека больше и каждый рабочий бригады работал бы на **1** час в день дольше, то это же задание было бы выполнено не более чем за **30** дней. При увеличении бригады еще на **6** человек и рабочего дня еще на **1** час, все задание было бы закончено не ранее чем через **21** день. Определите наименьшую при данных условиях численность бригады, а также продолжительность рабочего дня. (МГУ, Экономический ф-т, 4(6), 2002)

Пусть в бригаде x рабочих, продолжительность рабочего дня t часов, производительность каждого рабочего равна a.

Объем работы равен $x \cdot a \cdot t \cdot 42$

$$\frac{x \cdot a \cdot t \cdot 42}{(x+4)(t+1) \cdot a} \le 30;$$

$$\frac{x \cdot a \cdot t \cdot 42}{(x+10)(t+2) \cdot a} \ge 21;$$

$$\begin{cases} 7xt \le 5(x+4)(t+1) \\ 2xt \ge (x+10)(t+2) \end{cases};$$

$$\begin{cases} 7xt \le 5xt + 20t + 5x + 20 \\ 2xt \ge xt + 10t + 2x + 20 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2xt \le 20t + 5x + 20 \\ xt \ge 10t + 2x + 20 \end{cases};$$

$$\begin{cases} xt \le 10t + 2{,}5x + 10 \\ xt \ge 10t + 2x + 20 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \le \dfrac{10t+10}{t-2{,}5} = 10 + \dfrac{35}{t-2{,}5} \\ x \ge \dfrac{10t+20}{t-2} = 10 + \dfrac{40}{t-2} \end{cases};$$

8. Бригада рабочих выполняет задание за **42** дня. Если бы в бригаде было на **4** человека больше и каждый рабочий бригады работал бы на **1** час в день дольше, то это же задание было бы выполнено не более чем за **30** дней. При увеличении бригады еще на **6** человек и рабочего дня еще на **1** час, все задание было бы закончено не ранее чем через **21** день. Определите наименьшую при данных условиях численность бригады, а также продолжительность рабочего дня. (МГУ, Экономический ф-т, 4(6), 2002)

$$\begin{cases} x \le 10 + \dfrac{35}{t-2{,}5} \\ x \ge 10 + \dfrac{40}{t-2} \end{cases};$$

Исследуем взаимное расположение графиков функций $x = 10 + \frac{35}{t-2{,}5}$ и $x = 10 + \frac{40}{t-2}$

Найдем координаты точки пересечения графиков функций $x = 10 + \frac{35}{t-2{,}5}$ и $x = 10 + \frac{40}{t-2}$:

$$10 + \frac{35}{t-2{,}5} = 10 + \frac{40}{t-2}; \quad 35t - 70 = 40t - 100; \quad t = 6;$$

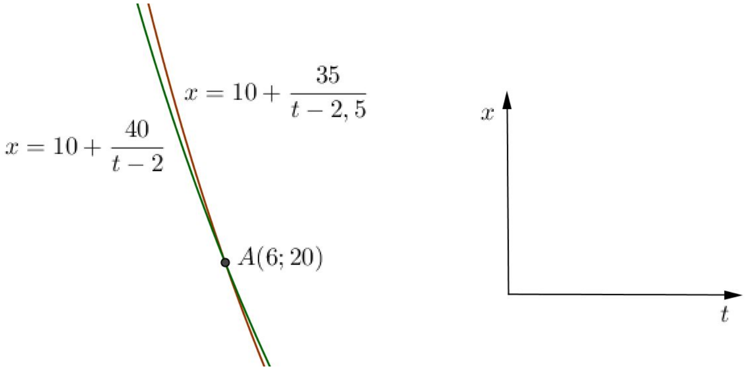
$$x(6) = 10 + \frac{35}{6-2{,}5} = 20. \qquad A(6;20)$$

Определим взаимное расположение графиков функций $x = 10 + \frac{35}{t-2{,}5}$ и $x = 10 + \frac{40}{t-2}$ при $t \le 6$

$$t = 5: \ 10 + \frac{35}{5-2{,}5} > 10 + \frac{40}{5-2}$$

$x_{min} = 20$ человек

$t = 6$ часов



Ответ: 20 человек, 6 часов.

9. Химический комбинат получил заказ на изготовление этилового спирта, соляной кислоты и дистиллированной воды. Для готовой продукции потребовалась **21** железнодорожная цистерна. При перекачивании были использованы три специализированных насоса: сначала первый насос заполнил четыре цистерны этиловым спиртом, затем второй насос заполнил шестнадцать цистерн соляной кислотой и в завершение третий насос заполнил одну цистерну дистиллированной водой. Найдите минимально возможное время, затраченное на перекачивание всей продукции, если известно, что суммарная производительность всех трёх насосов равна семи цистернам в сутки. (МГУ, ф-т государственного управления, 7(7), 2006)

Пусть производительность первого насоса x цистерн в сутки, второго - y цистерн в сутки, третьего - z цистерн в сутки.

Тогда время работы первого насоса равно $\frac{4}{x}$ дней, второго – $\frac{16}{y}$ дней, третьего $\frac{1}{z}$ дней.

$$\begin{cases} \frac{4}{x}+\frac{16}{y}+\frac{1}{z}=t \to min \\ x+y+z=7 \end{cases}$$

$$\left(\frac{4}{x}+\frac{16}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)=7t;$$

$$4+\frac{16x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{4y}{x}+16+\frac{y}{z}+\frac{4z}{x}+\frac{16z}{y}+1=7t;$$

$$21+\left(\frac{16x}{y}+\frac{4y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{4z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{16z}{y}\right)=7t;$$

≥ 16 $\quad$ ≥ 4 $\quad$ ≥ 8

$7t \geq 49;$ $\quad$ $t \geq 7;$

Неравенство Коши:

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$

$a \geq 0, b \geq 0$

Неравенство Коши:

$a+b = 2\sqrt{ab}$

если $a=b$

$t=7$, если

$$\begin{cases} \frac{16x}{y}=\frac{4y}{x} \\ \frac{x}{z}=\frac{4z}{x} \\ \frac{y}{z}=\frac{16z}{y} \end{cases};$$

$$\begin{cases} y^2=4x^2 \\ x^2=4z^2 \\ y^2=16z^2 \\ x+y+z=7 \end{cases};$$

9. Химический комбинат получил заказ на изготовление этилового спирта, соляной кислоты и дистиллированной воды. Для готовой продукции потребовалась **21** железнодорожная цистерна. При перекачивании были использованы три специализированных насоса: сначала первый насос заполнил четыре цистерны этиловым спиртом, затем второй насос заполнил шестнадцать цистерн соляной кислотой и в завершение третий насос заполнил одну цистерну дистиллированной водой. Найдите минимально возможное время, затраченное на перекачивание всей продукции, если известно, что суммарная производительность всех трёх насосов равна семи цистернам в сутки. (МГУ, ф-т государственного управления, 7(7), 2006)

$t = 7$, если

$$\begin{cases} y^2 = 4x^2 \\ x^2 = 4z^2 \\ y^2 = 16z^2 \\ x + y + z = 7 \end{cases}; \qquad \begin{cases} y = 2x \\ x = 2z \\ y = 4z \\ x + y + z = 7 \end{cases};$$

$$2z + 4z + z = 7$$

$$z = 1; x = 2; y = 4$$

Ответ: 7 дней.

10. Автофургон грузоподъемностью **339** кг перевозит ящики с виноградом и яблоками. Вес и стоимость одного ящика с виноградом составляют **15** кг и **10** условных единиц, ящика с яблоками – **27** кг и **8** условных единиц. Известно, что количество загруженных на автофургон ящиков с виноградом составляет не более **70%** от количества загруженных ящиков с яблоками. Определите наибольшую возможную стоимость всех ящиков с виноградом и яблоками, перевозимых автофургоном при данных условиях. (МГУ, Экономический ф-т, 5(7), 2004)

Пусть было загружено x ящиков с виноградом и y ящиков с яблоками.

$$15x + 27y \le 339$$

$$x \le 0{,}7y$$

$$S = 10x + 8y \to max$$

$$\begin{cases} 15x + 27y \le 339 \\ x \le 0{,}7y \\ S = 10x + 8y \to max \end{cases}$$

Стоимость 1 кг винограда: $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ у.е.

Стоимость 1 кг яблок: $\frac{8}{27}$ у.е.

$$\frac{2}{3} > \frac{8}{27}$$

$x = 22;$ $\quad 27y \le 339 - 15 \cdot 22 = 9;$

$x = 6;$ $\quad 27y \le 339 - 15 \cdot 6 = 249;$

$y \le \frac{249}{27};$ $\quad y = 9$

$S = 10 \cdot 6 + 9 \cdot 8 = 132$

$x = 22 - n,$ $\quad y \le \frac{9 + 15n}{27};$

$$22 - n \le \frac{0{,}7(9 + 15n)}{27};$$

$$594 - 27n \le 6{,}3 + 10{,}5n;$$

$$37{,}5n \ge 587{,}7;$$

$$n \ge 15{,}672;$$

$$n = 16.$$

Ответ: 132 у. е.