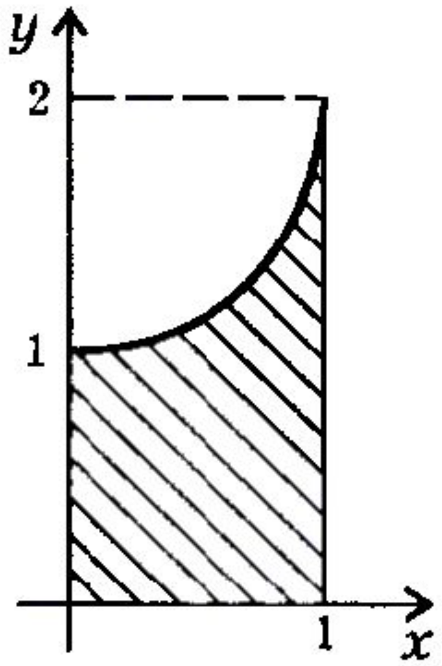
ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

а) Найдем объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 1$ и $y = 0$. Известно, что объем тела вращения вычисляется по формуле $V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$. Тогда получаем $V = \pi\int_0^1 \left(x^2+1\right)^2 dx = \pi\int_0^1 \left(x^4+2x^2+1\right)dx =$

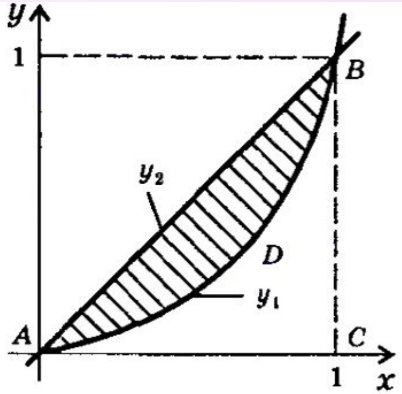


$$= \pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right) - \pi\left(\frac{0}{5}+\frac{2}{3}\cdot 0+0\right) = \pi\,\frac{3+10+15}{15} =$$

$$= \pi\frac{28}{15} = \frac{28}{15}\pi.$$

<u>Ответ</u>: $\frac{28}{15}\pi$.

371а) Вычислим объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями $y_1 = x^2$ и $y_2 = x$. При вращении



фигуры ABC ее объем $V_2 = \pi\int_0^1 y_2^2\,dx$. При вращении фигуры $ADBC$ ее объем $V_1 =$

$= \pi\int_0^1 y_1^2\,dx$. Тогда объем данной фигуры

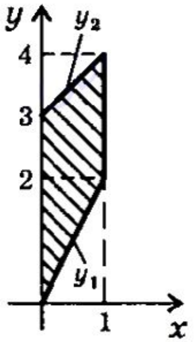
$$V = V_2 - V_1 = \pi\int_0^1 y_2^2\,dx - \pi\int_0^1 y_1^2\,dx = \pi\int_0^1 \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx = \pi\int_0^1 \left(x^2 - \left(x^2\right)^2\right)dx =$$

$$= \pi\int_0^1 \left(x^2 - x^4\right)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \pi\left(\frac{0}{3} - \frac{0}{5}\right) =$$

$$= \pi\cdot\frac{2}{15} - \pi\cdot 0 = \frac{2}{15}\pi.$$

Ответ: $\frac{2}{15}\pi$.

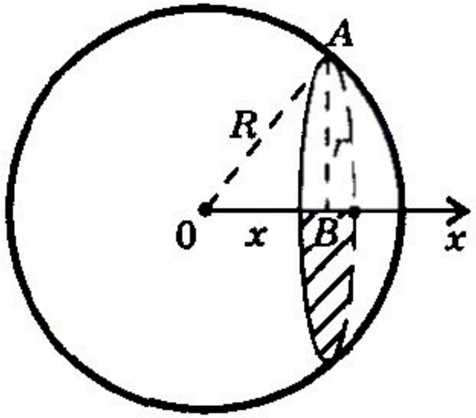
371б) Вычислим объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями $y_1 = 2x$, $y_2 = x + 3$, $x = 0$ и $x = 1$. Учитывая результаты предыдущей задачи, этот объем



$$V = \pi\int_0^1 \left(y_2^2 - y_1^2\right)dx = \int_0^1 \left(\left(x+3\right)^2 - \left(2x\right)^2\right)dx = \pi\int_0^1 \left(x^2 + 6x + 9 - 4x^2\right)dx =$$

$$= \pi\int_0^1 \left(6x + 9 - 3x^2\right)dx = \pi\left(3x^2 + 9x - x^3\right)\Big|_0^1 = \pi(3 + 9 - 1) - \pi(0 + 0 - 0) = 11\pi.$$

Ответ: 11π.



372а) Введем ось координат перпендикулярно сечению шара с началом в центре шара. Сечением шара является круг радиуса r и площадью $S(x) = \pi r^2$. Для нахождения радиуса r рассмотрим прямоугольный треугольник OAB. По теореме Пифагора $AB^2 = OA^2 - OB^2$ или $r^2 = R^2 - x^2$, тогда $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$. Теперь найдем объем шарового сегмента, используя формулу $V = \pi\int\limits_a^b S(x)\,dx$. Получаем

$$V = \pi \int\limits_{R-H}^{R} \pi\left(R^2 - x^2\right)dx = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-H}^{R} = \pi\left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3}\right) -$$

$$-\pi\left(R^2(R-H) - \frac{(R-H)^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^3 - \pi\left(R^3 - R^2 H - \frac{R^3 - 3R^2H + 3RH^2 - H^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 - \pi\left(\frac{2}{3}R^3 - RH^2 + \frac{H^3}{3}\right) = \pi\left(RH^2 - \frac{H^3}{3}\right) = \frac{\pi H^2}{3}(3R - H).$$

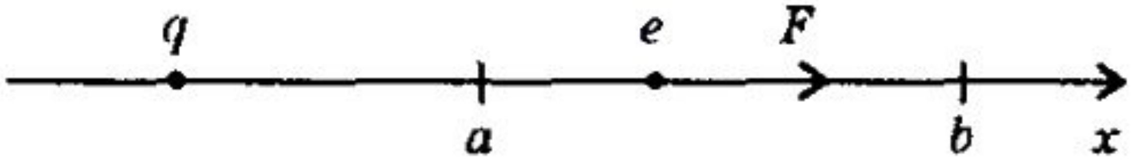
Ответ: $\frac{\pi H^2}{3}(3R - H)$.

374) По закону Гука сила F, растягивающая пружину на величину x, вычисляется по формуле $F = kx$ (где k — коэффициент пропорциональности). Так как сила в 4 Н растягивает пружину на 8 см (или 0,08 м), то получаем уравнение $4 = k \cdot\ ,08$, откуда $k = 50$. Тогда сила $F = 50x$. Теперь найдем работу, которая при этом совершается, по формуле $A = \int_a^b F(x)\,dx$.. Получаем:

$$A = \int_0^{0,08} 50x\,dx = 25x^2 \Big|_0^{0,08} = 25 \cdot 0,08^2 = 0,16 \text{ Дж.}$$

<u>Ответ</u>: 0,16 Дж.

375) По закону Кулона на электрон действует сила $F = -\frac{\gamma q}{x^2}$, где γ — коэффициент пропорциональности, q — величина заряда, x —

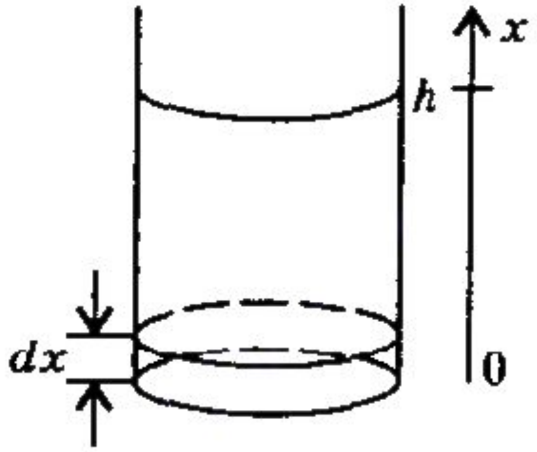


расстояние между зарядом и электроном. Найдем работу силы взаимодействия зарядов

$$A = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b -\frac{\gamma q}{x^2}\,dx = \frac{\gamma q}{x}\bigg|_a^b = \gamma q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right).$$

<u>Ответ</u>: $\gamma q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$.

377) Пусть тонкий слой жидкости плотности ρ толщины dx поднимается на высоту x. Тогда объем такого цилиндрического слоя $\pi r^2 dx$ и вес $\rho g \pi r^2 dx$. Работа, которая затрачивается на подъем этого слоя, равна $dA = \rho g \pi r^2 dx \cdot x$. Для нахождения всей работы по заполнению бака надо просуммировать по всем таким слоям (при условии, что толщина слоя $dx \to 0$). Получаем:



$$A = \int_0^h \rho g \pi r^2 x\, dx = \rho g \pi r^2 \int_0^h x\, dx = \rho g \pi r^2 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^h = \frac{\pi r^2 h^2 \rho g}{2}.$$

<u>Ответ</u>: $\frac{\pi r^2 h^2 \rho g}{2}$.