Лекция № 9

На следующем практическом занятии 21 апреля 22 г. проверочная работа № 3, вопросы 9-12.

Волновое уравнение:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x, y, z)$$

Линейное уравнение теплопроводности:

$$u_t = a^2 \Delta u + f(t, x, y, z)$$

Оператор Лапласа:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

При рассмотрении **стационарного процесса**, т.е. **не зависящего от времени**, полагают

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 0, \quad \dots$$

и получают

Уравнения эллиптического типа:

$$\boxed{\Delta u = 0 \ \text{ – уравнение Лапласа}}$$

$$\boxed{\Delta u = g(x, y, z) \ \text{ – уравнение Пуассона}}$$

где

$$g(x, y, z) = -\frac{f(x, y, z)}{a^2}$$

Эти уравнения описывают стационарные процессы: прогиб балки, распределение температуры, распределение примесей и т.п.

Уравнение Лапласа в случае отсутствия: внешних сил; внешних источников-стоков тепла или примесей.

Уравнение Пуассона в случае присутствия: внешних сил; внешних источников-стоков тепла или примесей.

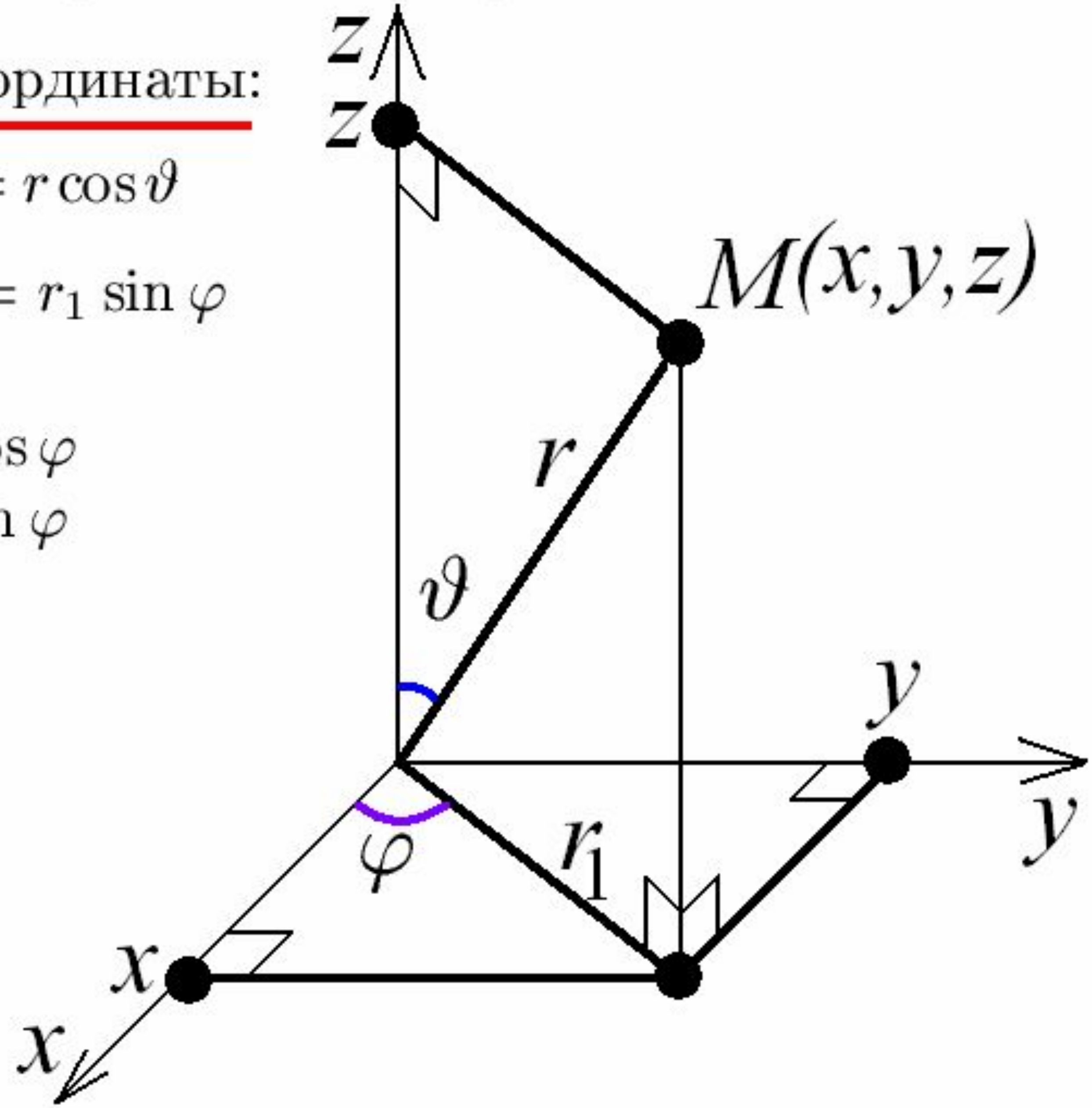
Запись оператора Лапласа в сферических и цилиндрических координатах

Сферические координаты:

$r_1 = r\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta$

$x = r_1\cos\varphi, \quad y = r_1\sin\varphi$

$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{cases}$$



$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

т.е.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

$\Delta u = 0$ – уравнение Лапласа, $\quad u = u(r, \varphi, \vartheta)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

$\Delta u = g$ – уравнение Пуассона, $\quad u = u(r, \varphi, \vartheta)$

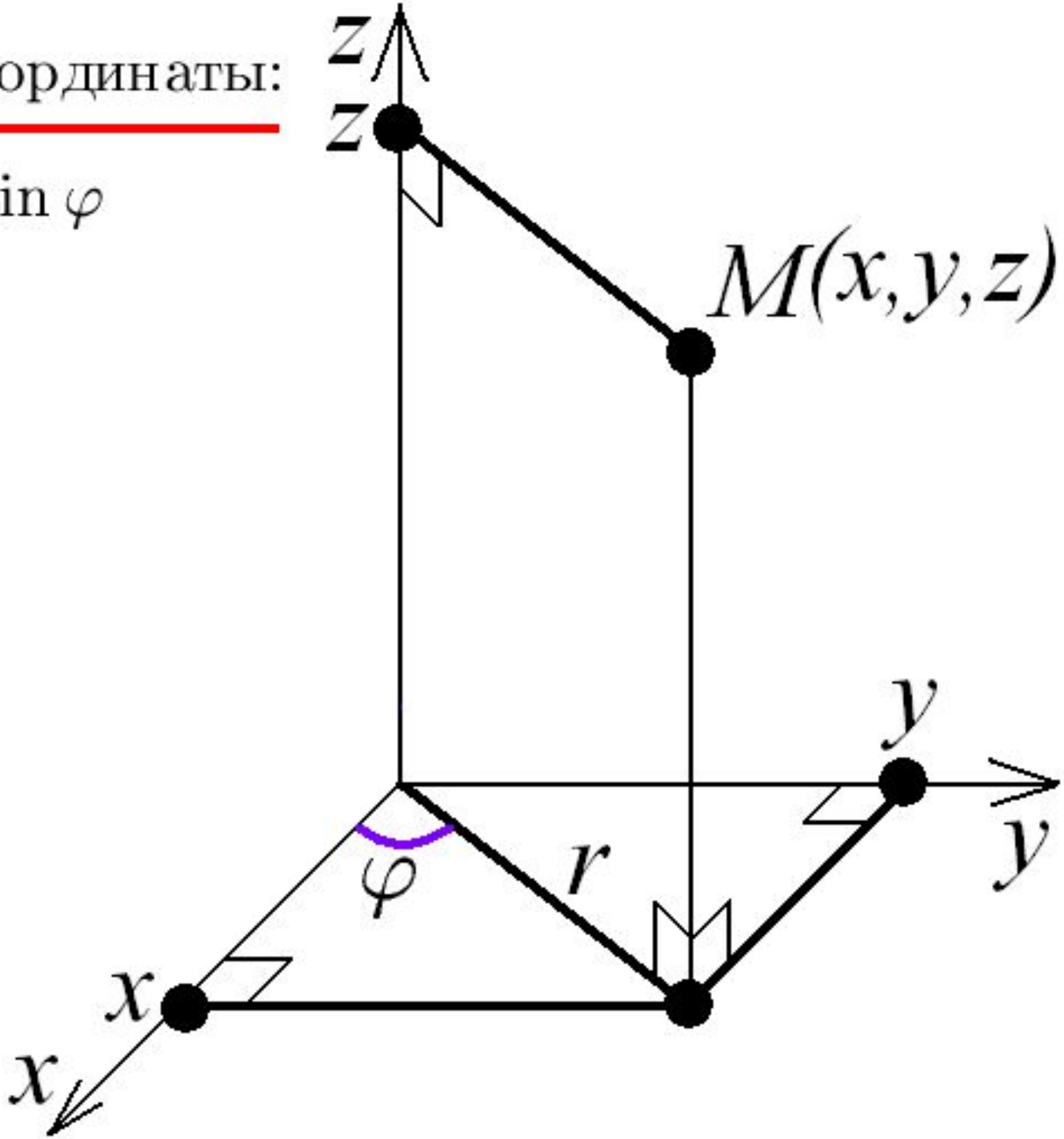
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = g_1(r, \varphi, \vartheta)$$

$$g_1(r, \varphi, \vartheta) = g(r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta)$$

Цилиндрические координаты:

$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$



$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$\Delta u = 0, \quad u = u(r, \varphi, z)$ – уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$\Delta u = g(r, \varphi, z), \quad u = u(r, \varphi, z)$ – уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g_2(r, \varphi, z)$$

$$g_2(r, \varphi, z) = g(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)$$

Частные случаи.

Сферически-симметричный $(\nu = 2)$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial \vartheta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

Общее решение: $u(r) = C_1 + C_2 \dfrac{1}{r}$

Цилиндрически-симметричный $(\nu = 1)$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

Общее решение: $u(r) = C_1 + C_2 \ln r$

У обоих решений особенность при $r \to 0$,

т.е. $u \to \infty$ при $r \to 0$.

При $r \to +\infty$ решения ведут различно:

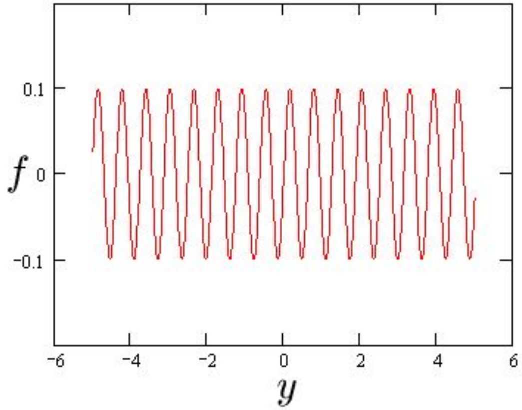
$\nu = 2$: $u \to 0$ при $r \to \infty$

$\nu = 1$: $u \to \infty$ при $r \to \infty$

Пример Адамара. *Задача Коши для уравнения Лапласа поставлена некорректно.*

$$f(y) = \frac{\sin(ny)}{n}$$

$$n = 10$$



$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(x,y)|_{x=0} = 0, \\ u_x(x,y)|_{x=0} = 0, \\ \\ \text{Решение:} \\ u(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u(x,y)|_{x=0} = 0, \\ u_x(x,y)|_{x=0} = \dfrac{\sin ny}{n}, \\ \\ \text{Решение:} \\ u(x,y) = \operatorname{sh}(nx)\dfrac{\sin ny}{n^2} \end{cases}$$

Здесь:

$$\operatorname{sh}(nx) = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2}$$ – синус гиперболический

Проверка, что $u(x,y) = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} \frac{\sin ny}{n^2}$ – решение рассматриваемой задачи Коши:

$$u(x,y)|_{x=0} = \frac{e^0 - e^0}{2} \frac{\sin ny}{n^2} = 0$$

$$u_x = \frac{n(e^{nx} + e^{-nx})}{2} \frac{\sin ny}{n^2} = \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2} \frac{\sin ny}{n}$$

$$u_x(x,y)|_{x=0} = \frac{e^0 + e^0}{2} \frac{\sin ny}{n} = \frac{\sin ny}{n}$$

$$u_{xx} = \frac{n(e^{nx} - e^{-nx})}{2} \frac{\sin ny}{n} = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} \sin ny$$

$$u_y = \frac{(e^{nx} - e^{-nx})}{2} \frac{n \cos ny}{n^2} = \frac{(e^{nx} - e^{-nx})}{2} \frac{\cos ny}{n}$$

$$u_{yy} = \frac{(e^{nx} - e^{-nx})}{2} \frac{-n \sin ny}{n} = - \frac{(e^{nx} - e^{-nx})}{2} \sin ny$$

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} \sin ny - \frac{(e^{nx} - e^{-nx})}{2} \sin ny \equiv 0$$

Пример Адамара является решением рассматриваемой задачи Коши.

Анализ решения Адамара.

Начальное условие $u_x|_{x=0}$ удовлетворяет неравенствам:

$$\forall y: \quad -\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin ny}{n} \leqslant \frac{1}{n},$$

т.е. при $n \to \infty$ имеем

$$\boxed{u_x|_{x=0} = \frac{\sin ny}{n} \to 0}$$

Но для любого $x_0 > 0$ при $n \to \infty$:

$$\frac{e^{nx_0} - e^{-nx_0}}{2} \frac{\sin ny}{n^2} \sim \frac{e^{nx_0}}{n^2} \frac{\sin ny}{2} \to +\infty$$

так как

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^2} = +\infty}$$

Для любого $x_0 < 0$ при $n \to \infty$:

$$\frac{e^{nx_0} - e^{-nx_0}}{2} \frac{\sin ny}{n^2} \sim -\frac{e^{-nx_0}}{n^2} \frac{\sin ny}{2} \to -\infty$$

Т.е. в решении Адамара:

первое начальное данное есть тождественный нуль;

второе начальное данное при $n \to \infty$ стремится к нулю,

а само решение при любом $x_o \neq 0$ не стремится к нулевому,

его модуль неограниченно растет!!!