Подготовка к комплексному экзамену

1. Правило Крамера

Рассмотрим СЛУ с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Из коэффициентов системы составим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Случай, когда $\Delta \neq 0$.

Определитель называют определителем системы.

Т.к. $\Delta \neq 0,$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Формулы получили название формул Крамера и применимы лишь в случае, если определитель системы отличен от нуля.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

1. $\begin{cases} 2x - 4y + z = 3 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

1 способ: правило Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5)\cdot 1 + (-4)\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot(-1) -$$

$$- 1\cdot(-5)\cdot 1 - 1\cdot(-4)\cdot 1 - 2\cdot 3\cdot(-1) =$$

$$= -10 - 12 - 1 + 5 + 4 + 6 = -8$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta z = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2 \ ; \ y = \frac{0}{-8} = 0 ; \ z = \frac{-8}{8} = -1$$

$(2; 0; -1)$

2. Матричный способ решения СЛУ (с помощью обратной матрицы)

Рассмотрим систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

В матричной форме записи эта система уравнений имеет вид

$$A \cdot X = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

2. Матричный способ решения СЛУ (с помощью обратной матрицы)

$$A \cdot X = B \qquad |A| \neq 0$$

$$A \cdot X = B \,\Big|\, \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

1. $\begin{cases} 2x - 4y + z = 3 \\ x - 5y + 3z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

2 спосіб: матричний

$$x = A^{-1} \cdot B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-3) = 2$$

$$A_{13} = 4$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-4+1) = 3$$

$$A_{22} = 1 \,, \quad A_{23} = -2$$

$$A_{31} = -7 \,, \quad A_{32} = -5 \,, \quad A_{33} = -6$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$x = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) + (-7) \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) + (-6) \cdot 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

3 способ: метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ -2\mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :(-2) \\ \cdot(-1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - z = 1 \\ 2z = -2 \end{cases} \uparrow$$

$z = -1$

$2y = 1 + z \Rightarrow y = 0$

$x = 1 + y - z \Rightarrow x = 2$

$\underline{(2; 0; -1)}$

Экстремумы функции двух переменных.

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой окрестности $M_0(x_0,y_0)$. Функция $z=f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$ *локальный максимум (минимум)*, если существует окрестность в точке M_0, в которой для любой точки $M(x,y)$:

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0) \quad [f(x,y) \ge f(x_0,y_0)]$$

Это **точки экстремума**.

Необходимое условие экстремума:

Если функция *f(x,y)* в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет экстремум и частные производные первого порядка, то в этой точке:

$$f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$$

Достаточное условие экстремума:

Пусть в точке $M_0(x_0,y_0)$ возможного экстремума и в некоторой её окрестности функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка и

$$\Delta = f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - [f''_{xy}(x_0,y_0)]^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

Тогда,

1) если $\Delta > 0$, то в точке *M(x,y)*функция имеет экстремум и:

   при $f_{xx}^{//}(x_0, y_0) < 0$ - максимум,

   при $f_{xx}^{//}(x_0, y_0) > 0$ - минимум;

2) если $\Delta < 0$, то экстремума нет;
3) если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, а может и не быть.

2. $z = 2y^2 + x^2 - 2xy + 4y + 4$

$$z'_x = 2x - 2y$$

$$z'_y = 4y - 2x + 4$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 4y - 2x + 4 = 0 \quad | : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ 2y - x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$2x - x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$y = -2 \Rightarrow \underline{M(-2; -2)}$$

$$z''_{xx} = 2 \qquad z''_{yy} = 4$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = -2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0$$

$M(-2;-2)$ – т. min

$$z_{min}(-2;-2) = 2\cdot(-2)^2 + (-2)^2 - 2\cdot(-2)\cdot(-2) + 4\cdot(-2) + 4 = 8 + 4 - 8 - 8 + 4 = 0$$

3. $x \Leftrightarrow y \equiv (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$

1 сп. Таблица истинности

	1		5		2		4		3	
x	$\Leftrightarrow$	y	$\equiv$	$(x$	$\wedge$	$y)$	$\vee$	$(\bar{x}$	$\wedge$	$\bar{y})$
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1

3. $x \Leftrightarrow y \equiv (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$

2 способ: метод от противного

$$x \Leftrightarrow y \equiv (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$$

0

1

1 1 1 1 1 0 0 0 0

1

↯

3. $x \Leftrightarrow y \equiv (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$

3 способ: основные равн-іи

$(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) \equiv (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$

$(\bar{x} \vee y) \vee (\bar{y} \vee x) \equiv (x \vee \bar{x}) \wedge (x \vee \bar{y}) \vee$

$\vee (y \vee \bar{x}) \wedge (y \vee \bar{y})$

$\bar{x} \vee y \vee \bar{y} \vee x \equiv 1 \wedge (x \vee \bar{y}) \vee (y \vee \bar{x}) \wedge 1$

$1 \vee 1 \equiv 1$

$1 \backsim 1$

4. База получает некоторую продукцию с трёх заводов 15%, 45%,40% соответственно. В продукции первого завода брак составляет 4%, второго-6%, третьего-8%. Найти вероятность того, что потребитель получит с базы стандартное изделие.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i) -$$

формула полной вероятности

4. A – стандартное изделие

H_1 – продукция с первого завода

H_2 – "—" 2-го

H_3 – "—" 3-его завода

$P(H_1) = 0{,}15$, $P(H_2) = 0{,}45$

$P(H_3) = 0{,}4$

$P(A|H_1) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$

$P(A|H_2) = 0{,}94$

$P(A|H_3) = 0{,}92$

$$P(A) = 0{,}15 \cdot 0{,}96 + 0{,}45 \cdot 0{,}94 + 0{,}4 \cdot 0{,}92 = 0{,}935$$

93,5% – получить с базы стандартное изделие

5. В партии 55% изделий второго сорта, остальные первого сорта. Наудачу отобраны 2 изделия. Написать закон распределения. Написать закон распределения случайной величины X – числа изделий второго сорта среди отобранных. Найти числовые характеристики (математическое ожидание M(X), дисперсиюD(X), среднеквадратическое отклонение).

Биномиальное распределение ДСВ:

$$P_k = (X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$M(x) = n \cdot p$ – среднеожидаемое знач.

$D(x) = n \cdot p \cdot q$ – рассеивание

$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$ – вероятность того, что значение СВ отклонится от математ. ожидания

$$P(x=0) = C_2^0 \cdot 0{,}55^0 \cdot 0{,}45^{2-0} = 0{,}2025$$

$$P(x=1) = C_2^1 \cdot 0{,}55^1 \cdot 0{,}45^{2-1} = 0{,}495$$

$$P(x=2) = C_2^2 \cdot 0{,}55^2 \cdot 0{,}45^{2-2} = 0{,}3025$$

x_i	0	1	3
p_i	0,2025	0,495	0,3025

Проверка: $0{,}2025 + 0{,}495 + 0{,}3025 = 1$

$$M(x) = n \cdot p = 2 \cdot 0{,}55 = 1{,}1$$

$$D(x) = n \cdot p \cdot q = 2 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}45 = 0{,}495$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} \approx 0{,}7036$$

Вычисление определённого интеграла методом подстановки

$$6.\ \int_{-2}^{3} \frac{6x\,dx}{(x^2-1)^3} = \left| \begin{array}{l} x^2-1=t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \dfrac{dt}{2} \\ 3^2-1=t_1 \Rightarrow t_1=8 \\ (-2)^2-1=t_2 \Rightarrow t_2=3 \end{array} \right| = \int_3^8 6\,\frac{\frac{dt}{2}}{t^3} =$$

$$= \int_3^8 \frac{3\,dt}{t^3} = 3\cdot\int_3^8 t^{-3}\,dt = 3\cdot \frac{t^{-3+1}}{(-3+1)}\Bigg|_3^8 = 3\cdot\frac{t^{-2}}{-2}\Bigg|_3^8 =$$

$$= -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t^2}\Bigg|_3^8 = -\frac{3}{2}\left(\frac{1}{8^2}-\frac{1}{3^2}\right) = -\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{64}-\frac{1}{9}\right) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{(-55)}{576} =$$

$$= \underline{\frac{165}{1152}}$$

Признак Даламбера

$$\sum_{i=1}^{n} a_n$$ – числовой ряд

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

1) $D < 1 \Rightarrow$ ряд сходится

2) $D > 1 \Rightarrow$ ряд расходится

3) $D = 1 \Rightarrow$ ряд сх. v расх.

7. $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{9^n}{n!}$ – числовой ряд

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$a_n = \frac{9^n}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{9^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{9^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{9^n}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{9^n}\cdot 9 \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}\cdot(n+1)\cdot \cancel{9^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n+1} =$$

$$= 9 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \to \text{сх.}$$