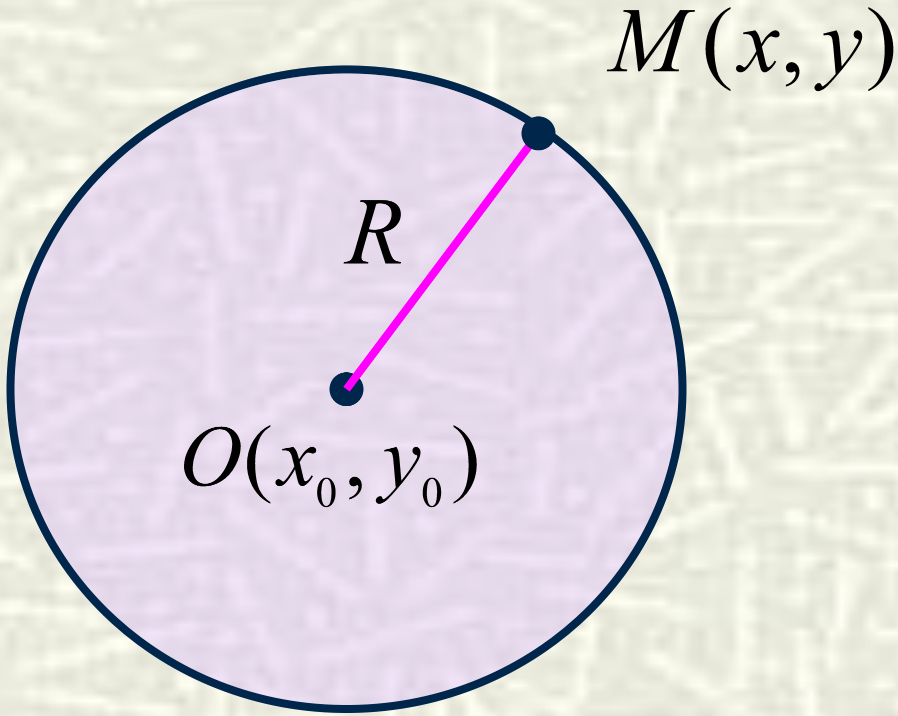
4.3. ОКРУЖНОСТЬ И ЭЛЛИПС

Окружность и эллипс относятся к кривым второго порядка, которые описываются уравнениями второй степени с двумя переменными.

Пусть дана окружность радиуса *R* с центром в точке O(x_0,y_0). Найдем ее уравнение.

Выберем на окружности произвольную точку *M* (*x*,*y*).


$M(x, y)$
R
$O(x_0, y_0)$

Для точки *M* выполняется равенство:

$$OM = R$$

Используем формулу расстояния между двумя точками:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

Возводим обе части выражения в квадрат:

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$$

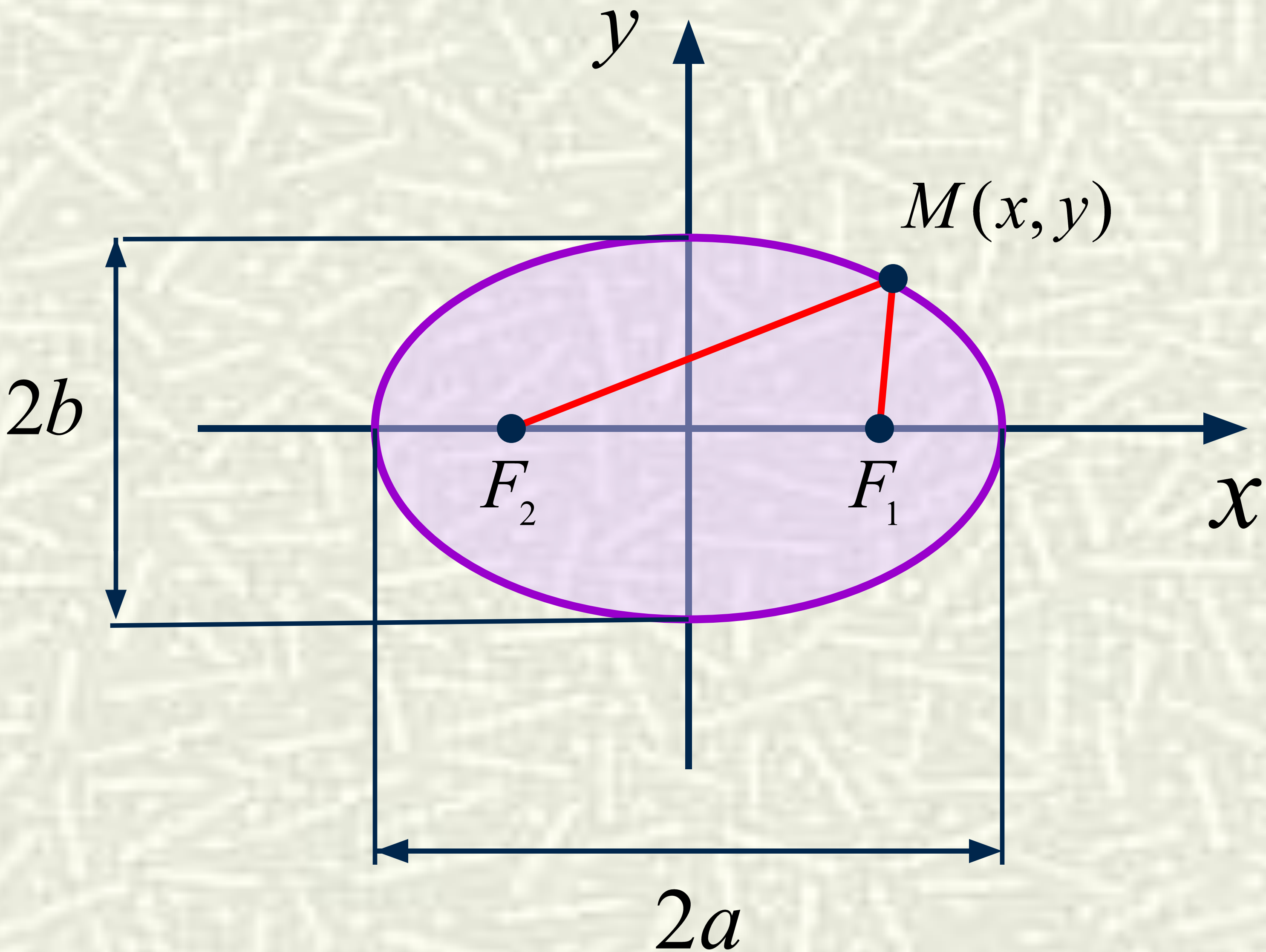
нормальное уравнение окружности

Если центр окружности лежит в начале координат (0,0):

$$x^2 + y^2 = R^2$$

каноническое уравнение окружности

ЭЛЛИПСОМ называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.



y
M (x, y)
2b
F2
F1
x
2a

Введем обозначения:

$$F_1(c;0) \qquad F_2(-c;0)$$

$$|F_1F_2| = 2c$$

a **– большая полуось эллипса**

b **– малая полуось эллипса**

Для любой точки *M(x,y)*, принадлежащей эллипсу, по определению выполняется равенство:

$$|F_1M| + |MF_2| = 2a$$

ТЕОРЕМА

Для того, чтобы точка М(х,у) принадлежала эллипсу, необходимо и достаточно, чтобы ее координаты удовлетворяли уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$

Покажем, что координаты точки, принадлежащей эллипсу, удовлетворяют уравнению (1).

Т.к. точка *M(x,y)* принадлежит эллипсу, то по определению эллипса, должно выполнятся условие

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a$$

Выразим каждое расстояние по формуле расстояния между двумя точками:

$$F_1(c;0)$$

$$M(x;y)$$

$$|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left.\begin{matrix} F_2(-c;0) \\ M(x;y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow |F_2M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Тогда:

$$|F_1M| + |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Возводим в квадрат обе части выражения:

$$(x+c)^2+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+\cancel{y^2}$$

$$\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

Возводим в еще раз квадрат:

$$a^2x^2 \cancel{-2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 \cancel{-2a^2cx} + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2\underbrace{(a^2 - c^2)}_{b^2} + a^2y^2 = a^2\underbrace{(a^2 - c^2)}_{b^2}$$

Делим все выражение на a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

каноническое уравнение эллипса

***Отношение фокусного расстояния к длине большой оси эллипса называется* ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОМ**

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Для эллипса $c < a$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Следовательно, для эллипса $0 < \varepsilon < 1$

Чем меньше отношение малой и большой полуосей, тем больше эксцентриситет и тем более вытянутым будет эллипс вдоль оси *x*, и наоборот.

При $b = a \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 0$ **имеем окружность.**

Пусть дан эллипс: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Это уравнение эквивалентно системе двух параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

Проверим:

$$x^2 = a^2\cos^2 t$$
$$y^2 = b^2\sin^2 t$$

$$\Rightarrow \frac{a^2\cos^2 t}{a^2}+\frac{b^2\sin^2 t}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

параметрическое уравнение эллипса