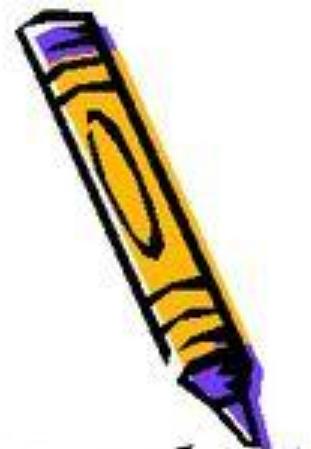


Тема: «Способы решения тригонометрических уравнений»



Алгебра 10 класс

Однородные уравнения



Первой степени:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

Т.к. $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на $\cos x$ (или на $\sin x$). Получим: простое уравнение $a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0$ или $\operatorname{tg} x = m$.

Второй степени:

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$. Получим квадратное уравнение:

$$a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0.$$



$$\sin^2 x = 3 \sin x \cos x$$

$$\sin^2 x - 3 \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x (\sin x - 3 \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x - 3 \cos x = 0 \quad (\because \cos x \neq 0)$$

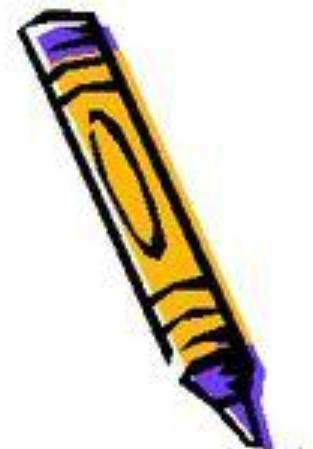
$$x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x - 3 = 0$$

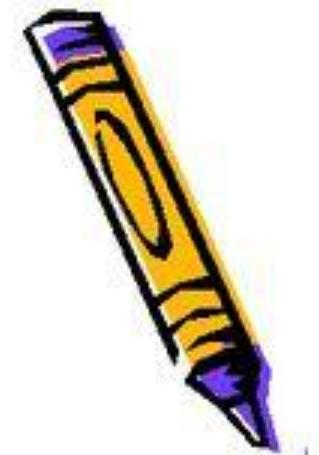
$$\operatorname{tg} x = 3$$

$$x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$



Однородные уравнения



$$5\tg^2 x - 3\tgx - 2 = 0$$

Пусть $a = \tg x$

$$5a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$a_1 = -0,4; a_2 = 1$$

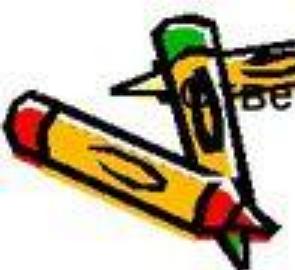
$$1) \tg x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$$2) \tg x = -0,4$$

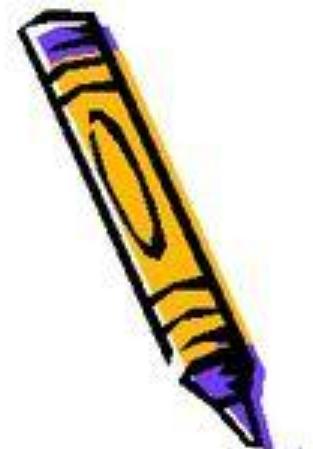
$$x = \arctg(-0,4) + \pi n, n \in Z$$

$$x = -\arctg 0,4 + \pi n, n \in Z$$



Отв: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, x = -\arctg 0,4 + \pi n, n \in Z$

Сведения к квадратному уравнению



$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Пусть $a = \sin x$

$$2a^2 + a - 1 = 0$$

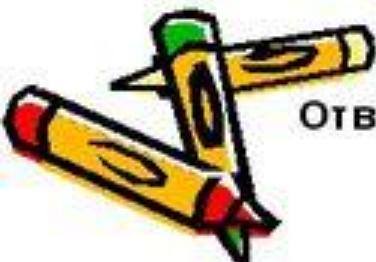
$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = -1$$

$$1) \sin x = \frac{1}{2}$$

$$2) \sin x = -1$$

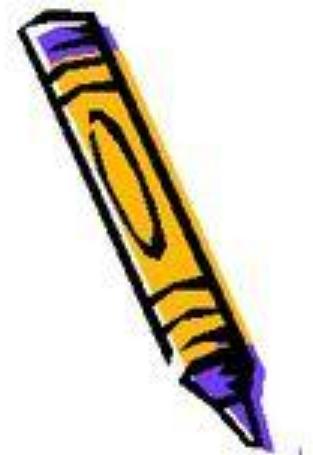
$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in Z; \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$



Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Разложения на множители



$$2\sin 2x + \sin x = 0$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$4\sin x \cos x + \sin x = 0$$

$$\sin x(4\cos x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$4\cos x + 1 = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

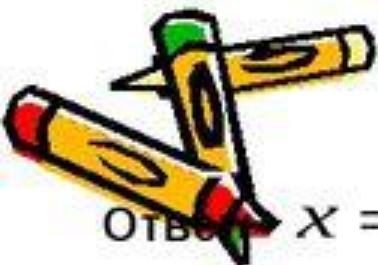
$$4\cos x = -1$$

$$\cos x = -\frac{1}{4}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



Сведения к квадратному уравнению

$$2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0$$

$$2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0$$

$$-2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$$

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

Пусть $a = \sin x$

$$2a^2 - 5a + 2 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = 2$$

$$1) \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

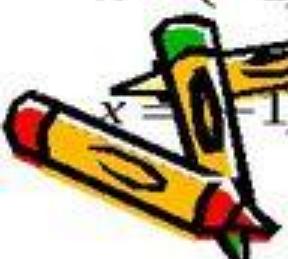
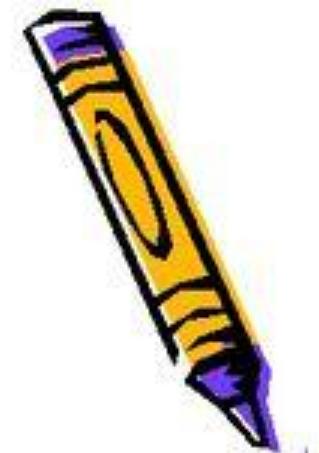
$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin x = -2$$

уравнение решения не имеет, так как

$$|\sin x| \leq 1$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$



Метод введения вспомогательного угла



$$a \cos x + b \sin x = c$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} > 0$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$\sin \varphi \cos x + \cos \varphi \sin x = 1,$$

$$\sin(\varphi + x) = 1$$

$$\varphi + x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Метод введения вспомогательного угла

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 : 2$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi m, n \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi m, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi m, n \in \mathbb{Z}$$

