Тема: «Способы решения тригонометрических уравнений»

Алгебра 10 класс

Однородные уравнения

Первой степени:

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

Т.к. $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на $\cos x$ (или на $\sin x$). Получим: простое уравнение $a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0$ или $\operatorname{tg} x = m$.

Второй степени:

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$. Получим квадратное уравнение:

$$a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0.$$

$$\sin^2 x = 3\sin x \cos x$$

$$\sin^2 x - 3\sin x \cos x = 0$$

$$\sin x(\sin x - 3\cos x) = 0$$

$\sin x = 0$ *или* $\sin x - 3\cos x = 0 \quad (\div \cos x \neq 0)$

$x = \pi k, \quad k \in z$

$$tgx - 3 = 0$$

$$tgx = 3$$

$$x = arctg3 + \pi n, \quad n \in z$$

Ответ: $x = \pi k,\ k \in z;\ x = arctg3 + \pi n,\ n \in z$

Однородные уравнения

$$5tg^2x - 3tgx - 2 = 0$$

Пусть a = tg x

$$5a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$a_1 = -0,4; a_2 = 1$$

$1) tgx = 1$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$2) tgx = -0,4$

$$x = arctg(-0,4) + \pi n, n \in Z$$

$$x = -arctg\,0,4 + \pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z,\ x = -arctg\,0,4 + \pi n, n \in Z$

Сведения к квадратному уравнению

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

Пусть a = sin x

$$2a^2 + a - 1 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = -1$$

$$1) \sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z;$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

$$2) \sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

Разложения на множители

$$2\sin 2x + \sin x = 0$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$4\sin x\cos x + \sin x = 0$$

$$\sin x(4\cos x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in Z$$

$$4\cos x + 1 = 0$$

$$4\cos x = -1$$

$$\cos x = -\frac{1}{4}$$

$$x = \pm\arccos(-\frac{1}{4}) + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{4}) + 2\pi k, k \in Z$$

Ответ: $x = \pi n, n \in Z$, $x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{4}) + 2\pi k, k \in Z.$

Сведения к квадратному уравнению

$$2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0$$

$$2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0$$

$$-2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$$

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

Пусть a = sin x

$$2a^2 - 5a + 2 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = 2$$

$$1)\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z;$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

$$2)\sin x = -2$$

уравнение решения не имеет, так как

$$|\sin x| \le 1$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Метод введения вспомогательного угла

$$a\cos x + b\sin x = c$$

$$\sqrt{a^2+b^2} = A \quad >0$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b}};$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x = 1,$$

$$\sin(\varphi + x) = 1$$

$$\varphi + x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$x = \frac{\pi}{2} - \varphi + \pi n, n \in Z$$

$$\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Метод введения вспомогательного угла

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \,|: 2$$

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$$

$$Ответ: x = (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$$