Лекция 2. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Математика для экономистов

1-курс

Старший преп. Айматова Фарида Уразовна

План

- 1. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.
- 2. Интегрирующий множитель
- 3.Решение примеров

1. Линейные однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

- ***Дифференциальным уравнением в полных дифференциалах*** называется уравнение вида

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, где левая часть является полным дифференциалом какой-либо функции двух переменных.

- Обозначим неизвестную функцию двух переменных (её-то и требуется найти при решении уравнений в полных дифференциалах) через F и скоро вернёмся к ней.
- Первое, на что следует обратить внимание: в правой части уравнения обязательно должен быть нуль, а знак, соединяющий два члена в левой части, должен быть плюсом.
- Второе - должно соблюдаться некоторое равенство, которое является подтверждением того, что данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Эта проверка является обязательной частью алгоритма решения уравнений в полных дифференциалах (он во втором параграфе этого урока), так процесс поиска функции F достаточно трудоёмкий и важно на начальном этапе убедиться в том, что мы не потратим время зря.

1. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

- Итак, неизвестную функцию, которую требуется найти, обозначили через F. Сумма частных дифференциалов по всем независимым переменным даёт полный дифференциал. Следовательно, если уравнение является уравнением в полных дифференциалах, левая часть уравнения представляет собой сумму частных дифференциалов. Тогда по определению
- $dF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.
- Вспоминаем формулу вычисления полного дифференциала функции двух переменных:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

- Решая два последних равенства, можем записать $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$

1. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

- Первое равенство дифференцируем по переменной "игрек", второе - по переменной "икс": $$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
- Так как $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, получим $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,

1. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

- что является условием того, что данное дифференциальное уравнение действительно представляет собой **уравнение в полных дифференциалах**.
- **Алгоритм решения дифференциальных уравнений в полных дифференциалах**
- **Шаг 1.** Убедиться, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Для того, чтобы выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)$ было полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
- Иными словами, нужно взять частную производную по x одного слагаемого в левой части выражения и частную производную по y другого слагаемого и, если эти производные равны, то уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

1. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Шаг 2. Записать систему уравнений из частных производных, составляющих функцию F:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases}$$

1. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Шаг 3. Проинтегрировать первое уравнение системы - $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$ по x (y остаётся константой и выносится за знак интеграла). Таким образом восстанавливаем функцию F:

$$F(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y)$$,

где $\varphi(y)$ - пока неизвестная функция от y.

Альтернативный вариант (если так интеграл найти проще) - проинтегрировать второе уравнение системы - $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$ по y (x остаётся константой и выносится за знак интеграла). Таким образом так же восстанавливается функция F:

$$F(x, y) = \int Q(x, y)dy + \varphi(x)$$,

где $\varphi(x)$ - пока неизвестная функция от x.

1. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Шаг 4. Результат шага 3 (найденный общий интеграл) продифференцировать по y (в альтернативном варианте - по x) и приравнять ко второму уравнению системы:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,\ y)dx\right)+\varphi'(y)=Q(x,\ y),$$

а в альтернативном варианте - к первому уравнению системы:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int Q(x,\ y)dy\right)+\varphi'(x)=P(x,\ y).$$

Из полученного уравнения определяем $\varphi'(y)$ (в альтернативном варианте $\varphi'(x)$)

1. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Шаг 5. Результат шага 4 интегрировать и найти $\varphi(y)$ (в альтернативном варианте найти $\varphi(x)$).

Шаг 6. Результат шага 5 подставить в результат шага 3 - в восстановленную частным интегрированием функцию F. Произвольную постоянную C чаще записывают после знака равенства - в правой части уравнения. Таким образом получаем общее решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах. Оно, как уже говорилось, имеет вид $F(x, y) = C$.

Примеры решений дифференциальных уравнений в полных дифференциалах

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$$(2x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0.$$

Шаг 1. Убедимся, что уравнение является ***уравнением в полных дифференциалах***. Для этого находим частную производную по x одного слагаемого в левой части выражения $(2x+y)'_x=2$ и частную производную по y другого слагаемого $(x+2y)'_y=2$. Эти производные равны, значит, уравнение является ***уравнением в полных дифференциалах***.

Шаг 2. Запишем систему уравнений из частных производных, составляющих функцию F:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + y \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x + 2y \end{cases}$$

Шаг 3. Проинтегрируем первое уравнение системы - $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + y$ по x (y остаётся константой и выносится за знак интеграла). Таким образом восстанавливаем функцию F:

$$F = \int (2x + y)\,dx = 2\int x\,dx + y\int dx =$$

$$= x^2 + xy + \varphi(x),$$

где $\varphi(y)$ - пока неизвестная функция от y.

Шаг 4. Результат шага 3 (найденный общий интеграл) продифференцируем по y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(x^2 + xy + \varphi(y)\right)'_y =$$

$$= 0 + x + \varphi'_y(y) = x + \varphi'_y(y)$$

и приравняем ко второму уравнению системы: $x + \varphi'_y(y) = x + 2y$.

Из полученного уравнения определяем $\varphi'(y)$: $\varphi'_y(y) = 2y$.

Шаг 5. Результат шага 4 интегрируем и находим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = \int 2y dy = 2\int y dy = 2\frac{y^2}{2} + C =$$

$$= y^2 + C.$$

Шаг 6. Результат шага 5 подставляем в результат шага 3 - в восстановленную частным интегрированием функцию F. Произвольную постоянную C записываем после знака равенства. Таким образом получаем общее ***решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах***:

$$F = x^2 + xy + y^2 = C.$$

- Какая ошибка возможна здесь с наибольшей вероятностью? Самые распространённые ошибки - принять частный интеграл по одной из переменных за обычный интеграл произведения функций и пытаться интегрировать по частям или заменной переменной а также принять частную производную двух сомножителей за производную произведения функций и искать производную по соответствующей формуле.
- Это надо запомнить: при вычислении частного интеграла по одной из переменной другая является константой и выносится за знак интеграла, а при вычислении частной производной по одной из переменной другая также является константой и производная выражения находится как производная "действующей" переменной, умноженной на константу.
- Среди ***уравнений в полных дифференциалах*** не редкость - примеры с экспонентой. Таков следующий пример. Он же примечателен и тем, что в его решении используется альтернативный вариант.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение

$$e^y dx + \left(xe^y - 2y\right)dy = 0$$.

Шаг 1. Убедимся, что уравнение является ***уравнением в полных дифференциалах***. Для этого находим частную производную по x одного слагаемого в левой части выражения

$$\left(xe^y - 2y\right)'_x = e^y$$

и частную производную по y другого слагаемого $\left(e^y\right)'_y = e^y$. Эти производные равны, значит, уравнение является ***уравнением в полных дифференциалах***.

Шаг 2. Запишем систему уравнений из частных производных, составляющих функцию F:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = e^y \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = xe^y - 2y \end{cases}$$

Шаг 3. Проинтегрируем второе уравнение системы - $\frac{\partial F}{\partial y} = xe^y - 2y$ по y (x остаётся константой и выносится за знак интеграла). Таким образом восстанавливаем функцию F:

$$F = \int \left(xe^y - 2y \right) dy = x\int e^y - 2\int y = xe^y - 2\frac{y^2}{2} + C =$$

$$= xe^y - y^2 + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ - пока неизвестная функция от x.

Шаг 4. Результат шага 3 (найденный общий интеграл) продифференцируем по x

$$\left(xe^y - y^2 + \varphi(x) \right)'_x = e^y + \varphi'(x)$$

и приравняем к первому уравнению системы: $e^y + \varphi'(x) = e^y$.

Из полученного уравнения определяем $\varphi'(x)$:

$\varphi'(x) = 0$.

Шаг 5. Результат шага 4 интегрируем и находим $\varphi(x)$:
$$\varphi(x) = \int 0dx = 0 + C.$$

Шаг 6. Результат шага 5 подставляем в результат шага 3 - в восстановленную частным интегрированием функцию F. Произвольную постоянную C записываем после знака равенства. Таким образом получаем общее ***решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах***: $F = xe^y - y^2 = C$.

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение

$$(10xy-8y+1)dx+(5x^2-8x+3)dy=0$$.

Шаг 1. Убедимся, что уравнение является ***уравнением в полных дифференциалах***. Для этого находим частную производную по y одного слагаемого в левой части выражения

$$(10xy-8y+1)'_y=10x-8$$

и частную производную по x другого слагаемого

$$(5x^2-8x+3)'_x=10x-8$$. Эти производные равны, значит, уравнение является ***уравнением в полных дифференциалах***.

Шаг 2. Запишем систему уравнений из частных производных, составляющих функцию F:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=10xy-8y+1 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=5x^2-8x+3 \end{cases}$$

Шаг 3. Проинтегрируем первое уравнение системы - $\frac{\partial F}{\partial x} = 10xy - 8y + 1$ по x (y остаётся константой и выносится за знак интеграла). Таким образом восстанавливаем функцию F:

$$F = \int (10xy - 8y + 1)\,dx =$$

$$= 10y\int x\,dx - 8y\int dx + \int dx =$$

$$= 10y\frac{x^2}{2} - 8xy + x + \varphi(y) =$$

$$= 5x^2y - 8xy + x + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ - пока неизвестная функция от y.

Шаг 4. Результат шага 3 (найденный общий интеграл) продифференцируем по y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(5x^2y - 8xy + x + \varphi(y)\right) =$$

$$= 5x^2 - 8x + \varphi'(y)$$

и приравняем ко второму уравнению системы:

$$5x^2 - 8x + \varphi'(y) = 5x^2 - 8x + 3.$$

Из полученного уравнения определяем $\varphi'(y)$:

$$\varphi'(y) = 3.$$

Шаг 5. Результат шага 4 интегрируем и находим $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = 3\int dy = 3y + C$$

Шаг 6. Результат шага 5 подставляем в результат шага 3 - в восстановленную частным интегрированием функцию F. Произвольную постоянную C записываем после знака равенства.

Таким образом получаем общее **решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах**:

$$5x^2y - 8xy + x + 3y = C$$.

Литература

- 1.Письменный Д.Т. «Конспект лекции по высшей математике.1 часть/Д. Т.Письменный. - 5-е изд. М-: Айрис-пресс 2005.-288 с.: ил.
- 2. П.Е.Данко, А.Г.Попов, Т.А.Кожевникова, С.П.Данко. «Высшая математика в упражнениях и задачах».ч.2.7-е издание. М.Оникс. Мир и Образование.2008