Обчислення невизначених інтегралів різними методами інтегрування

Практичне заняття

Т-18 д

План

1.Первісна и невизначений інтеграл

2. Властивості невизначеного інтеграла.

3. Таблиця невизначених інтегралів.

4.Основні прийоми знаходження невизначеного інтеграла:

- Безпосереднє інтегрування;
- Метод заміни змінної;
- Інтегрування частинами.

1. Первісна і невизначений інтеграл

Визначення. Функція $F(x)$ називається ***первісною*** для функції $f(x)$, якщо її похідна або диференціал задовольняє умову $F'(x) = f(x)$, або $dF(x) = f(x)dx$.

Первісна і невизначений інтеграл

Кожна неперервна функція, що інтегрується, має нескінченну безліч первісних, що відрізняються на *сталу C*:

$$\left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x) \qquad (1)$$

Знаходження цих первісних називається ***інтегруванням.***

Сукупність усіх первісних для функції називається ***невизначеним інтегралом:***

$$\int f(x)dx = F(x)+C\,, \qquad (2)$$

2. Властивості інтегралу, які витікають із визначення

Невизначений інтеграл від диференціала неперервно диференціюємої функції дорівнює самій цій функції

1. $\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C,$

так як $\varphi(x)$ є первісною для $\varphi'(x)$.

Властивості_інтегралу

Сформулюємо далі наступні властивості невизначеного інтегралу:

2.Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають первісні, то функція $f_1(x)+f_2(x)$ також має первісну, при цьому:

$$\int\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

$$= F_1(x) + F_2(x) + C;$$

3. $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$;

4. $\int f(kx+b)dx = 1/kF(kx+b)+C$

3. Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Таблиця невизначених інтегралів

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$

4. Методи інтегрування

1. Метод безпосереднього інтегрування

- ***Приклад 1.*** Обчислити $\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx$
- ***Рішення.*** Так як під знаком інтегралу знаходиться сума чотирьох доданків, то розкладуємо інтеграл на суму чотирьох інтегралів:

$$\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx=\int x^2dx+3\int x^3dx+\int xdx+\int dx=.$$

$$=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$$

Приклад 2

$$\int\left(2x+\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = 2\int xdx+\int x^{\frac{1}{2}}dx+3\int x^{-\frac{1}{3}}dx =$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)+\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C_2+3\left(\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C_3\right) =$$

$$= x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\left(2C_1+C_2+3C_3\right)= x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$$

Приклад 3

$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$$

Приклад 4

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$$

2. Метод заміни змінної (спосіб підстановки).

Застосовується наступна формула:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \qquad (4)$$

де $x = \varphi(t)$ - диференційована функція ,

а t - нова змінна.

- ***Приклад 5 .*** Обчислити :

$$\int \cos 2x\,dx = \left| \begin{array}{l} 2x = t \\ d(2x) = dt \\ 2dx = dt \\ dx = \dfrac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

Приклад 6 . Обчислити :

$$\int \frac{1}{(1+3x)^7}dx = \left| \begin{aligned} &1+3x=t, \\ &d(1+3x)=dt \\ &3dx=dt, \\ &dx=\frac{1}{3}dt \end{aligned} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^7} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6t^6}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{18t^6}+C==-\frac{1}{18(1+3x)^6}+C$$

Приклад 6 . Обчислити :

$$\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx = \left| \begin{matrix} t = 2\ln x + 3 \\ dt = \frac{2}{x}dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int t^3 dt =$$

$$= \frac{1}{8}t^4 + C = \frac{1}{8}(2\ln x+3)^4 + C$$

3. Метод інтегрування частинами

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (3)$$

Інтеграли І-го типу:

$\int x^n \sin xdx$, де $n = 1,2 \ldots k$; $\int x^n e^x dx$, де $n = 1,2 \ldots k$,

вводять позначення: $x^n = u$, тоді $du = nx^{n-1}dx$, а,

наприклад $\sin xdx = dv$,тоді $v = -\cos x$.

Інтеграли ІІ-го типу:

$\int x^n arctgxdx$, $\int x^n \ln xdx$, де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm k$.

позначають за u функцію $arctgx$, $\ln x$, а за

dv беруть $x^n dx$.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Приклад 7. Обчислити $\int x \cos x dx$.

Розв'язання.

$$\int x \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C \ .$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Приклад 8. Обчислити

$$\int x\ln x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ \\ dv = xdx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Домашнє завдання:

- Опрацювати лекцію за посиланням: https://drive.google.com/file/d/1aresnkQDQA2Y9v5qCJMFjidEEUE2ScWL/view?usp=sharing ст. 97-102

-Розв'язати інтеграли:

$$a)\int\left(5x-\frac{1}{x}+\frac{6}{\sqrt[4]{x}}\right)dx; \qquad б)\int\cos x\sin^7 x\,dx$$

$$в)\int\frac{1}{(1+5x)^3}dx; \qquad г)\int(x+5)\sin x\,dx.$$