Решение рациональных неравенств методом интервалов

Цель: решая неравенства методом интервалов, рассмотреть особые случаи - корни четной кратности и точки разрыва.

Определение: Рациональными называют неравенства, содержащие только целые рациональные или дробно – рациональные функции. $x^2 - 6x + 5 < 0$

$$\frac{(x-3)(x+2)}{x} > 0$$

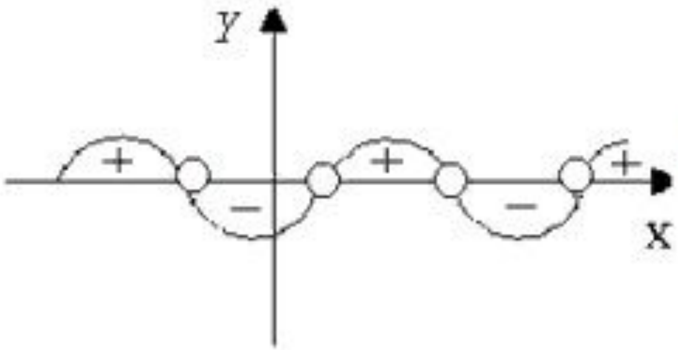
Решение дробно-рациональных неравенств методом интервалов:

1. Привести данное неравенство к виду $\frac{f(x)}{g(x)} > 0;$
2. Разложить числитель и знаменатель дроби на линейные множители;
3. Нанести на числовую ось числа, при которых каждый множитель равен нулю и разделить числовую ось на промежутки;
4. Выколоть те точки, которые не являются решением неравенства;
5. Выяснить знаки промежутков;
6. Выбрать ответ.

Метод интервалов заключается в следующем:

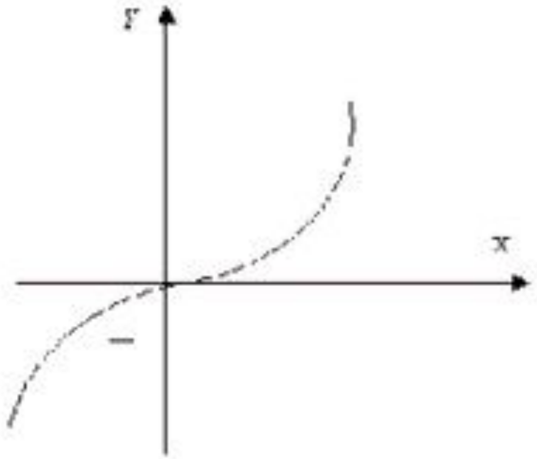
Числовая прямая разбивается нулями функции на конечное число интервалов, на каждом из которых функция сохраняет знак.

Когда происходит смена знака функции?

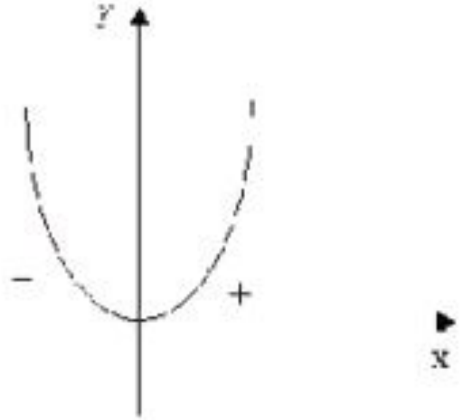


$y = f(x)$

Вывод: при переходе через нуль.



$y = x^3$



$y = x^2$

Точка x=0 является нулем функции, но функция при переходе через нуль знак не меняет

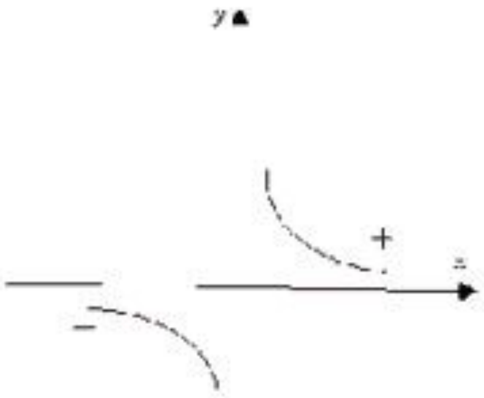
Вывод: $y = x^2$ относится к категории особых случаев, так как четная степень функции не влияет на знак неравенства, перемены знака не происходит

Устно

$(x-2)^2 > 0$ $\quad$ $(x-2)^2 \geq 0$ $\quad$ $(x-2)^2 < 0$

$x \neq 2$ $\quad$ $x \epsilon R$ $\quad$ Решений нет

Вывод: выражение, стоящее в четной степени, не влияет на знак неравенства, но влияет на решение и отбрасывать его без дополнительных ограничений нельзя



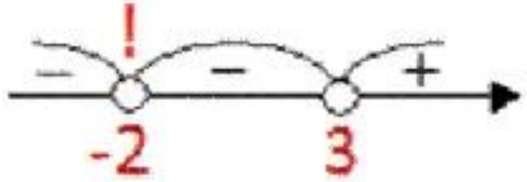
$$y = \frac{1}{x}$$

Обращаем внимание на то, что x=0 не является нулем функции, но при переходе через нуль знак функции меняется.

Вывод: те точки, которые обращают в нуль знаменатель (точки разрыва) тоже должны быть учтены как точки, при переходе через которые функция меняет свой знак.

Рассмотрим решение неравенства:

$$\frac{(x-3)(x+2)}{x+2} < 0$$

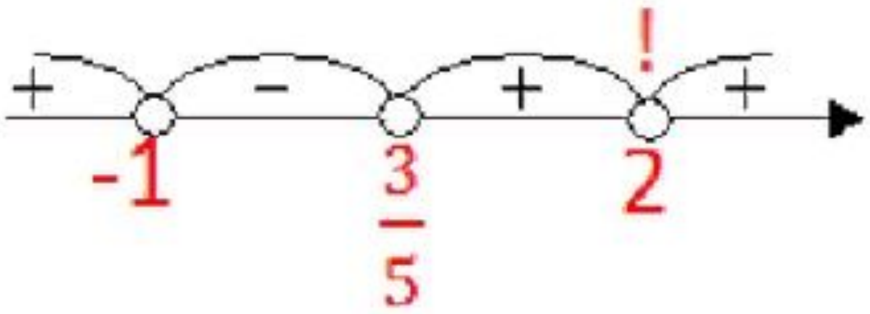


$$x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 3)$$

Вывод: x=-2 – корень четной кратности, при переходе через который функция знак не меняет .

Решить неравенство:

$$(x+1)^3(x-2)^2(5x-3) > 0$$



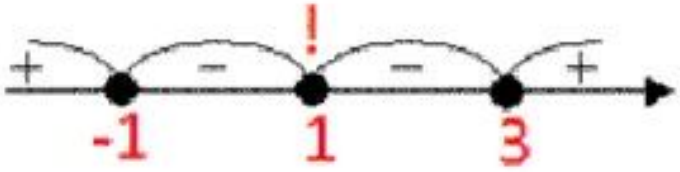
$$x \epsilon (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{5}; 2\right) \cup (2; +\infty)$$

Решить неравенство:

$$x^4 - 3 \leq 2x(2x^2 - x - 2)$$

$$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 \leq 0$$

$$(x-1)^2 * (x+1) * (x-3) \leq 0$$



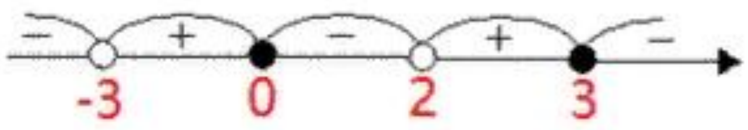
$x \epsilon [-1; 3]$

Решить неравенство:

$$\frac{(x^2+1)(x-3)x}{(x+3)(2-x)} \leq 0$$

$$(x^2+1) > 0$$

$$\frac{(x-3)x}{(x+3)(2-x)} \leq 0$$



$x \in (-\infty; -3) \cup [0; 2)$

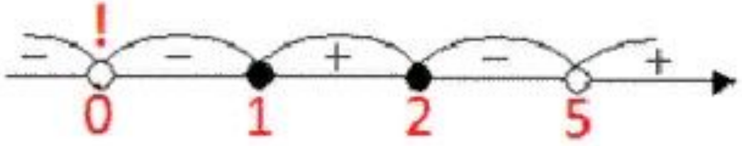
$\cup\ [3; +\infty)$

Решить неравенство:

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^3 - 5x^2} \leq 0$$

$$\frac{x^2(x^2 - 3x + 2)}{x^2(x - 5)} \leq 0$$

$$\frac{x^2(x - 1)(x - 2)}{x^2(x - 5)} \leq 0$$



$x \epsilon (-\infty; 0) \cup (0; 1] \cup [2; 5)$

НЕЛЬЗЯ!

Домножать на знаменатель, содержащий неизвестное

Решите неравенство $\boxed{\dfrac{1}{x} > 2.}$

Решение:

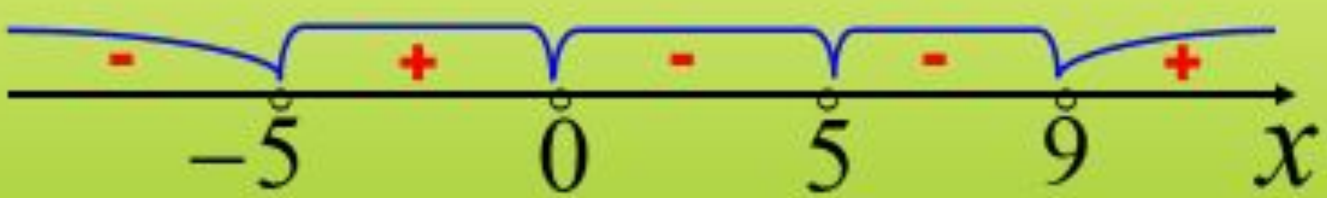
$$\frac{1}{x} - 2 > 0, \qquad \frac{1-2x}{x} > 0.$$

Ответ: $x \in (0;0,5).$

Решите неравенство

$$\frac{x^3-25x}{x^2-14x+45}<0;$$

$$\frac{x(x-5)(x+5)}{(x-5)(x-9)}<0.$$



$$\boxed{(-\infty;-5)\cup(0;5)\cup(5;9).}$$


НЕЛЬЗЯ!
Домножать на знаменатель, содержащий неизвестное
Сокращать на одинаковые множители