

Собственные значения и собственные вектора линейного оператора

Пусть φ - оператор пространства L .

Если для некоторого ненулевого вектора $x \in L$ и числа λ имеем

$$\varphi(x) = \lambda \cdot x,$$

то число λ называется **собственным значением оператора φ** , а вектор x называется **собственным вектором оператора φ** , **относящимся к собственному значению λ** .

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

1. **ЛЕММА 1.** Каждый собственный вектор x оператора φ относится к единственному собственному значению.
2. **ЛЕММА 2.** Если x_1 и x_2 – собственные векторы оператора φ , относящиеся к одному и тому же собственному значению λ , то их линейная комбинация $\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2$ – собственный вектор оператора φ , относящийся к тому же собственному значению.

Следствия ЛЕММЫ 2:

- а) каждому собственному значению λ соответствует бесконечное множество собственных векторов;
- б) если к множеству всех собственных векторов x оператора φ , относящихся к одному и тому же собственному значению λ , присоединить нулевой вектор, то получим подпространство пространства L . Это подпространство называется собственным подпространством оператора и обозначается L_λ .

3. **ЛЕММА 3.** Собственные векторы $x_1, x_2, \dots, x_k$ оператора φ , относящиеся к различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, линейно независимы.

Следствия ЛЕММЫ 3:

- а) линейный оператор, действующий в n -мерном линейном пространстве L_n , не может иметь более n собственных значений;
- б) в пространстве может существовать базис, хотя бы часть которого – собственные векторы оператора.

ТЕОРЕМА 1. Матрица A оператора φ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда все базисные векторы e_i являются собственными векторами этого оператора.

КРИТЕРИЙ ДИАГОНАЛИЗИРУЕМОСТИ ОПЕРАТОРА:
оператор φ диагонализируем тогда и только тогда, когда в пространстве L_n существует базис из собственных векторов оператора.

Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора

Пусть φ - оператор n -мерного пространства L_n , x - собственный вектор оператора φ , относящийся к собственному значению λ , т.е. $\varphi(x) = \lambda \cdot x$.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ - базис L_n , A - матрица линейного оператора φ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$

Получили:

- 1) x - собственный вектор оператора φ , относящийся к собственному значению λ , тогда и только тогда, когда его координаты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ являются решением (нетривиальным) системы линейных однородных уравнений $(A - \lambda E)x = 0$.
- 2) Подпространство L_λ является конечномерным, а его базис образуют собственные векторы $x_1, x_2, \dots, x_k$, координатами которых являются решения из фундаментальной системы решений ОСЛАУ $(A - \lambda E)x = 0$.

Матрица $A - \lambda E$ называется **характеристической матрицей** оператора φ (матрицы A).

Определитель характеристической матрицы, т.е. $\det(A - \lambda E)$ - многочлен степени n относительно переменной λ . Этот многочлен называют **характеристическим многочленом** оператора φ (матрицы A), а его корни - **характеристическими корнями оператора** φ (матрицы A).

Таким образом, **число λ является собственным значением оператора φ тогда и только тогда, когда оно является его характеристическим корнем.**

Решение матричного уравнения $(A - \lambda E) \cdot X = 0$
всегда имеет нулевое решение $\bar{x} = (0, 0, \dots, 0)$

Ненулевое решение существует, если

$$|A - \lambda E| = 0$$

**-характеристическое уравнение
оператора $A(\bar{x})$ или матрицы A .**

Пример.

Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

1) Найдём собственные значения λ , решив характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$

Учитывая, что $\lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, получим $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(3 - \lambda) \cdot (2 - \lambda) - 20 = 0 \Rightarrow 6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 20 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 7}$$

2) Определим собственные векторы, решая матричное уравнение

$$(A - \lambda E) \cdot X = 0$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 5 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 5x_1 = -4x_2 \\ x_1 = -0,8x_2 \end{cases}$$

$$x_1 = -0,8c, \quad x_2 = c \longrightarrow \overset{-(1)}{x} = (-0,8c, \quad c)$$

$$\lambda_2 = 7 \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = x_2 = c$$

$$\overset{-(2)}{x} = (c, c)$$