Электричество и магнетизм.

- Лектор:
- Парахин А.С., к. ф.-м. наук, доцент.

1.4. Диполь. Поле диполя.

- $\vec{E} = k\frac{q}{r^3}\vec{r}, \varphi = k\frac{q}{r}$
- Часто электрическое поле создаёт не один заряд, а целая система зарядов. Тогда расчёт электрического поля изменяется.
- Одной из самых распространённых систем зарядов является система из двух зарядов, равных по величине и противоположных по направлению.

Определение диполя.

- Определение.
- Система зарядов, состоящая из двух точечных равных и противоположных по знаку зарядов, называется электрическим диполем. Вектор, идущий от отрицательного заряда к положительному, называется плечом диполя.

По принципу суперпозиции:

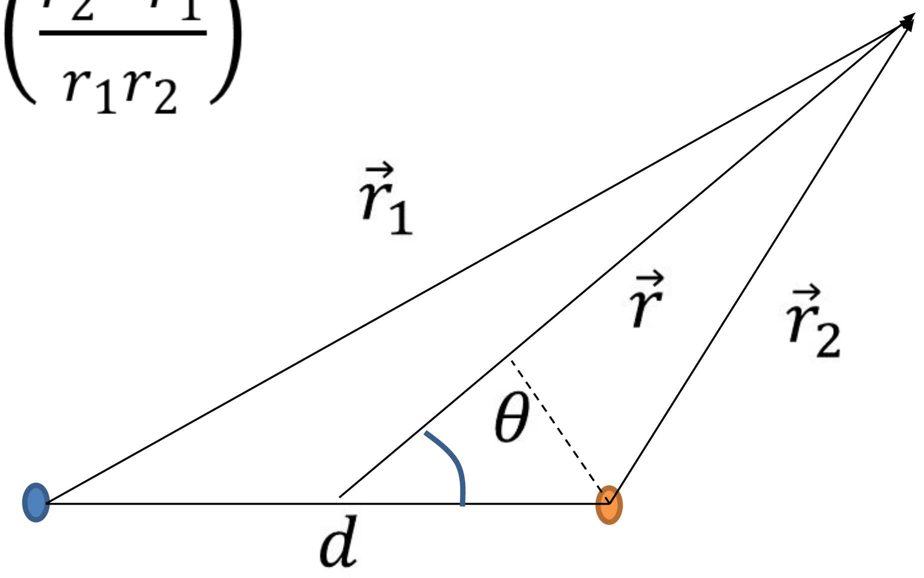
- Найдём электрическое поле, создаваемое диполем. Обозначим расстояние между зарядами d, а величину положительного заряда q. Тогда потенциал поля будет равен сумме потенциалов, создаваемых зарядами по отдельности.

Потенциал поля диполя.

- Необходимо только иметь в виду, что один потенциал будет положителен, второй – отрицателен:
- $\varphi = k\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = kq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$
- Здесь r_1 – расстояние от положительного заряда до точки наблюдения, r_2 – расстояние от отрицательного заряда до точки наблюдения, k – электростатическая константа.

Преобразование формулы.

- Приведём в скобках к общему знаменателю:
- $\varphi = kq\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$



Преобразование знаменателя.

- Если точка наблюдения отстоит достаточно далеко от диполя, то в знаменателе, можно считать, стоит квадрат расстояния от центра диполя до точки наблюдения
- $r_1 r_2 \cong r^2$.

Преобразование числителя.

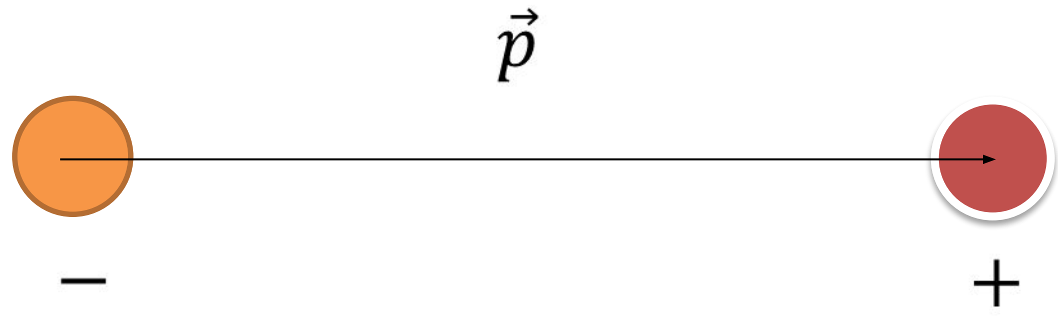
- В числителе же стоит произведение расстояния между зарядами диполя на косинус угла между плечом диполя и направлением на точку наблюдения
- $r_2 - r_1 \cong d cos\theta$
- как показано на рисунке.

Дипольный момент.

- Так что
- $\varphi = kq\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right) = kq\frac{dcos\theta}{r^2}$
- Определение.
- Физическая величина, численно равная произведению положительного заряда диполя на плечо диполя, называется электрическим моментом диполя или дипольным моментом.

Направление дипольного момента.

- Дипольный момент считается векторной величиной и направлен от отрицательного заряда к положительному. Обозначается дипольный момент $\vec{p}$.



Следствия из определения.

- 1. Вектор. Направлен от отрицательного заряда к положительному.
- 2. Размерность. $[p] = [q][l] = \text{Кл} \cdot \text{м}$

Потенциал поля диполя.

- С помощью понятия дипольного момента потенциал поля диполя можно записать следующим образом:
- $\varphi = k\frac{qdcos\theta}{r^2} = k\frac{pcos\theta}{r^2}$

Потенциал поля диполя.

- Умножим эту формулу на r и разделим на r:
- $\varphi = k\frac{qdcos\theta}{r^2} = k\frac{prcos\theta}{r^3}$
- В числителе стоит скалярное произведение дипольного момента и радиуса-вектора точки наблюдения. Так что
- $\varphi = k\frac{prcos\theta}{r^3} = k\frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}$

Напряжённость поля диполя.

- Чтобы найти напряжённость поля диполя, нужно найти градиент потенциала:
- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\vec{\nabla}(k\frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3})$

Координата x напряжённости поля диполя.

- Найдём этот градиент по координатам:
- $E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{(\vec{p},\vec{r})}{r^3}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}}\right) =$

$$= -k\,\frac{p_x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,3}} + \ k\,\frac{3\left(p_x x + p_y y + p_z z\right)x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^{\,5}} =$$

- $= k\,\frac{3(\vec{p},\vec{r})x}{r^5} - k\,\frac{p_x}{r^3}$

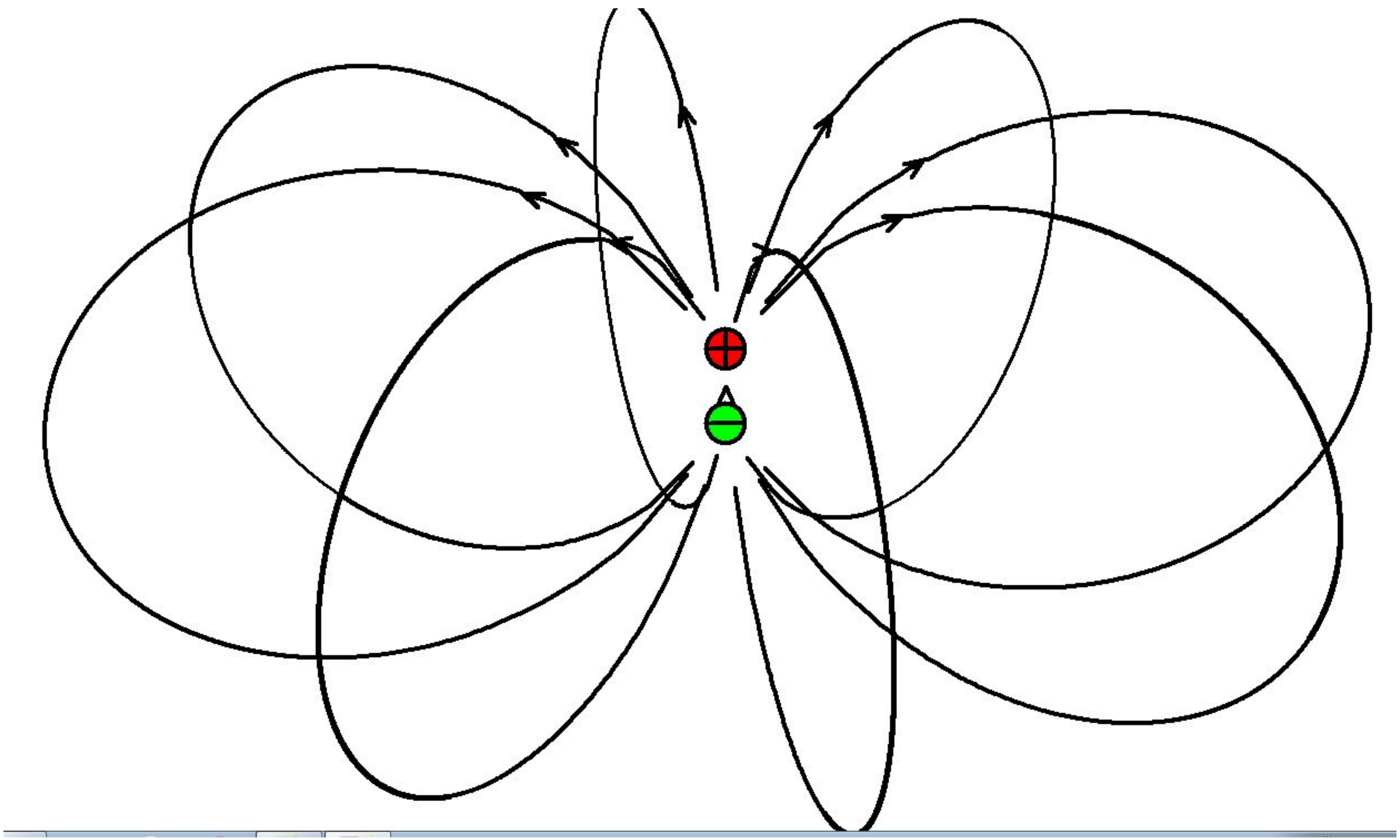
Проекции напряжённости на другие оси.

- Аналогично:
- $E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right) = k\frac{3(\vec{p},\vec{r})x}{r^5} - k\frac{p_x}{r^3}$
- $E_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right) = k\frac{3(\vec{p},\vec{r})y}{r^5} - k\frac{p_y}{r^3}$
- $E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{p_x x + p_y y + p_z z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\right) = k\frac{3(\vec{p},\vec{r})z}{r^5} - k\frac{p_z}{r^3}$

Вектор напряжённости поля диполя.

- Все эти три равенства можно записать одним векторным:
- $\vec{E} = \ k\frac{3(\vec{p},\vec{r})\vec{r}}{r^5} - k\frac{\vec{p}}{r^3}$
- Это и есть окончательная формула напряжённости электрического поля диполя.

Силовые линии поля диполя.



Программа

- Progr D: Progr E: Progr F: Progr G: Progr H:

1.5.Пондеромоторные силы.

- Определение.
- Пондеромоторными силами называются силы, действующие на тела со стороны различного рода полей.
- Рассмотрим силы действующие на электрические заряды в электрическом поле.

Сила, действующая на одиночный заряд

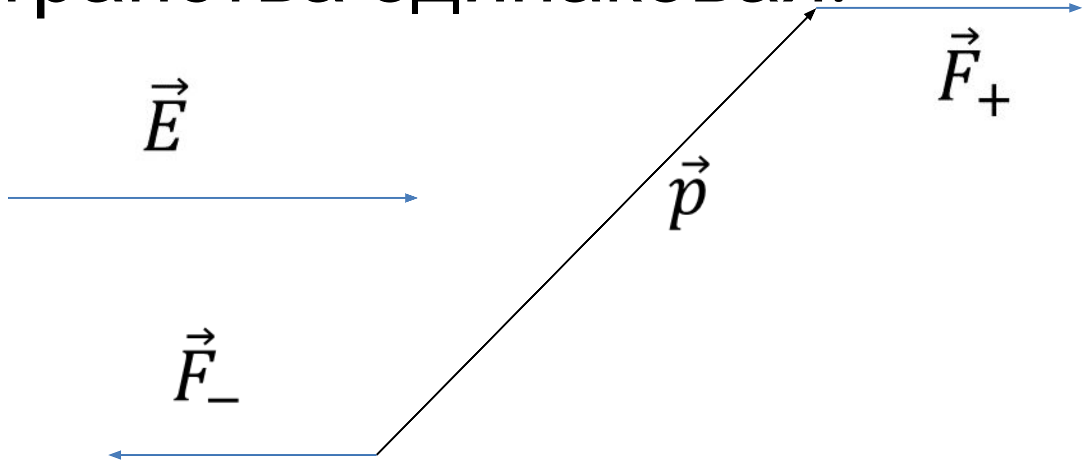
- Согласно определению напряжённости электрического поля, она представляет собой силу, действующую на единицу заряда, помещённого в данную точку пространства:
- $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$
- Отсюда можно найти силу, которая действует на заряд со стороны электрического поля:
- $\vec{F} = q\vec{E}$

Сила, действующая на систему зарядов.

- Если в поле внесена система зарядов, то согласно принципу суперпозиции сила будет равна сумме сил, действующих на каждый заряд:
- $\vec{F} = \vec{E}\sum_{i=1}^{n} q_i$

Сила, действующая на диполь.

- Предположим теперь, что в электрическое поле внесён диполь, а поле при этом является однородным, т. е. напряжённость его во всех точках пространства одинаковая.



Равенство нулю сил.

- Тогда на заряды диполя будут действовать равные по величине, но противоположные по направлению силы $\vec{F}_-$ и $\vec{F}_+$. Равенство этих сил и их антипараллельность означает, что результирующая сила, действующая на диполь равна нулю.
- Таким образом в однородном электрическом поле равнодействующая всех сил, действующих на диполь, равна нулю.

Момент сил, действующих на диполь.

- Найдём момент сил.
- $\overrightarrow{M} = [\vec{r}_-, \vec{F}_-] + [\vec{r}_+, \vec{F}_+] = -[\vec{r}_-, q\overrightarrow{E}] + [\vec{r}_+, q\overrightarrow{E}] = [q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-), \overrightarrow{E}]$
- Первый сомножитель в последнем векторном произведении равен дипольному моменту, так что момент сил, действующих на диполь, определяется его дипольным моментом:
- $\overrightarrow{M} = [\vec{p}, \overrightarrow{E}]$

Модуль момента сил.

- Найдём модуль этого момента:
- $M = pE\left|sin(\widehat{\vec{p},\vec{E}})\right|$
- Из этой формулы видно, что максимальный по модулю момент соответствует углу $\pi/2$ и $-\pi/2$ между дипольным моментом и напряжённостью электрического поля.

Равновесие диполя

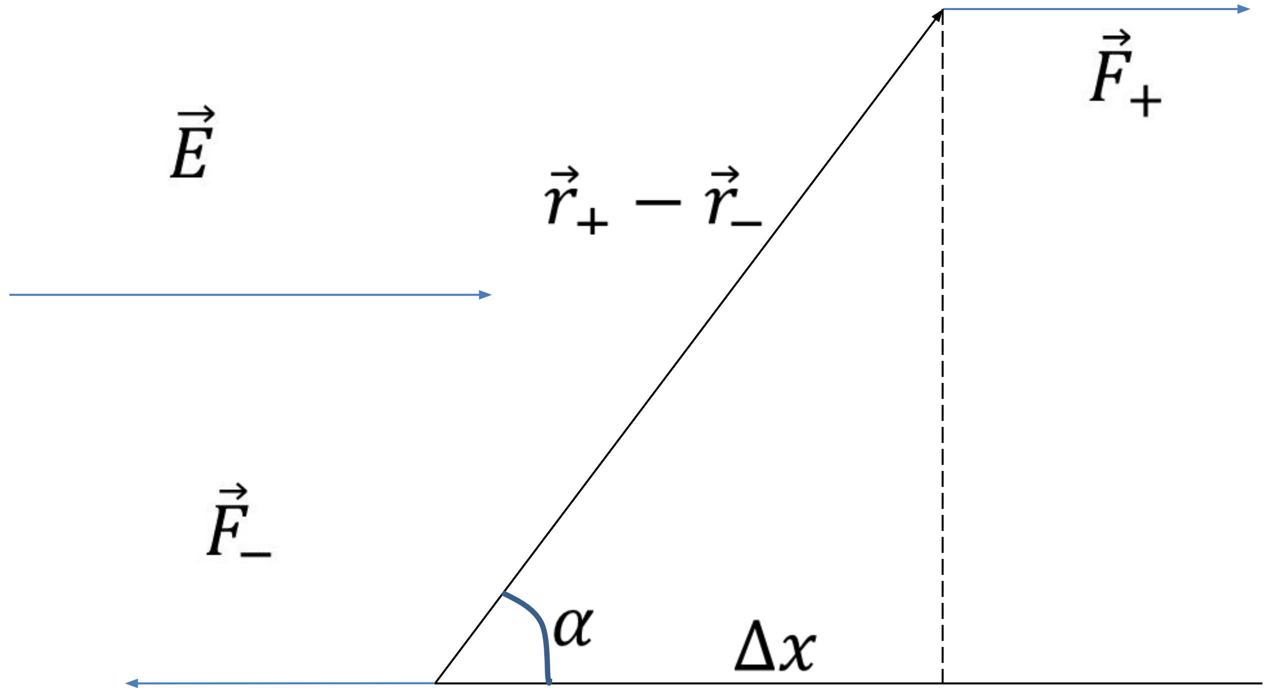
- Нулевой момент соответствует углам 0 и π. При этих углах дипольный момент остаётся в покое, если до этого покоился, т.е. находится в состоянии равновесия. Но для угла 0 это равновесие устойчиво, а для угла π – неустойчиво. Малейшее отклонение от этого положения приводит к вращению диполя. Он стремится к положению, когда угол между его моментом и напряжённостью поля равен нулю.

Демонстрация поворота диполя в электрическом поле.

Энергия диполя в электрическом поле.

- Найдём энергию диполя в электрическом поле. Обозначим $\varphi(x)$ потенциал поля в точке, где находится отрицательный заряд, а $\varphi(x + \Delta x)$ потенциал в точке, где находится положительный заряд. Ось абсцисс направлена вдоль электрического поля.

Схема расчёта.



Потенциальная энергия диполя.

- Тогда энергия диполя может быть найдена по формуле:
- $W = -q\varphi(x) + q\varphi(x+\Delta x) = \big(\varphi(x+\Delta x) - -\varphi(x)\big)q = \left(\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\right) q\Delta x =$
- $=\frac{\partial\varphi}{\partial x} q|\vec{r}_{+} - \vec{r}_{-}|cos\alpha$

Работа по перемещению пробного заряда.

- Здесь α – угол между напряжённостью поля и дипольным моментом. А
- $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\left|\vec{E}\right|, \quad q|\vec{r}_+ - \vec{r}_-| = |\vec{p}|$
- Так что:
- $W = -\left|\vec{E}\right||\vec{p}|cos\alpha = -(\vec{E}, \vec{p})$

Минимум и максимум потенциальной энергии диполя.

- Таким образом, потенциальная энергия диполя равна скалярному произведению напряжённости на дипольный момент. При этом минимум потенциальной энергии соответствует нулевому углу между напряжённостью электрического поля и дипольным моментом, а максимум углу π.
- Стремление к минимуму пот. энергии.

Сила, действующая на диполь в неоднородном поле.

- Наконец, найдём силы, действующие на диполь в неоднородном электрическом поле. Для этого воспользуемся связью между силой и потенциальной энергией:
- $\vec{F} = -\vec{\nabla} W$

Преобразование формул

- Как было показано ранее:
- $W = -(\vec{E}, \vec{p})$
- Тогда
- $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{E}, \vec{p})$

Формула силы

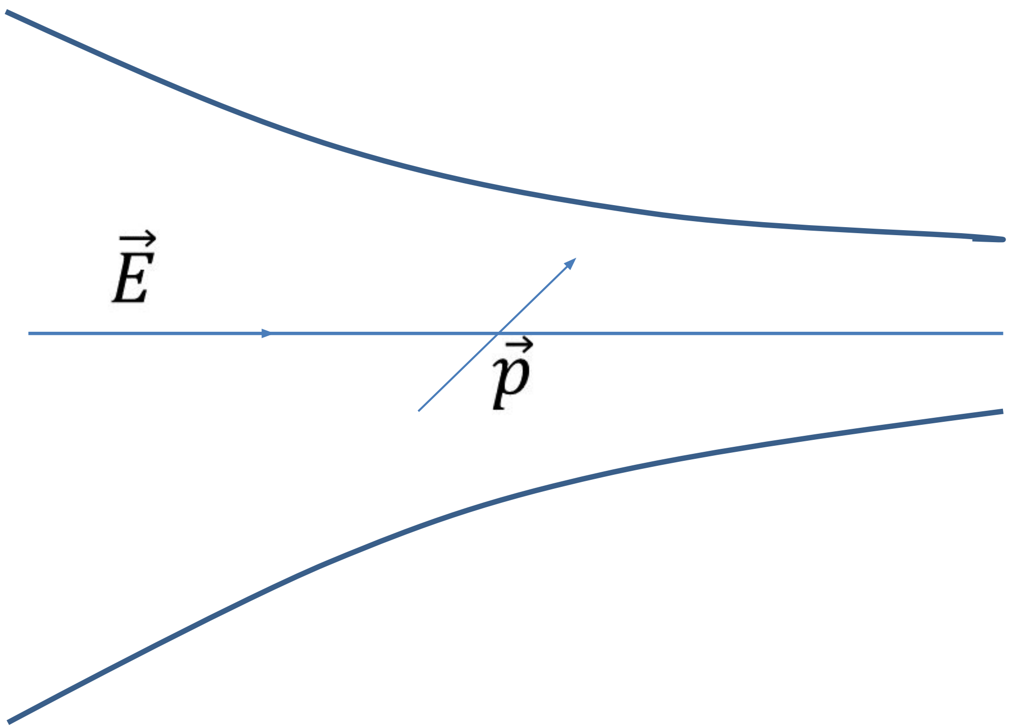
- Дипольный момент от координат не зависит, значит дифференцировать нужно только напряжённость электрического поля:
- $\vec{F} = (\vec{\nabla}\vec{E}, \vec{p})$

Координаты силы

- Из этой формулы можно найти проекции силы на оси координат:
- $F_x = (\vec{\nabla} E_x, \vec{p})$
- $F_y = (\vec{\nabla} E_y, \vec{p})$
- $F_z = (\vec{\nabla} E_z, \vec{p})$

Диполь в неоднородном поле

- Рассмотрим самый распространённый случай, когда силовые линии поля расположены, как показано на рисунке:



Проекция силы на ось ox

- В этом случае координаты вектора напряжённости электрического поля вдоль осей ординат и аппликат равны нулю, поэтому энергия диполя вычисляется по формуле:
- $W = -\left(\vec{E}, \vec{p}\right) = -E_x p_x = -E_x p cos\alpha$
- а силу можно рассчитать по формуле:
- $F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial x}\ p cos\alpha$

1.6.Прямой расчёт поля системы зарядов.

- Часто система зарядов представляет собой не точечные заряды, как у диполя, а непрерывное распределённые заряды. При этом в одной точке пространства зарядов может быть больше, в другой – меньше.

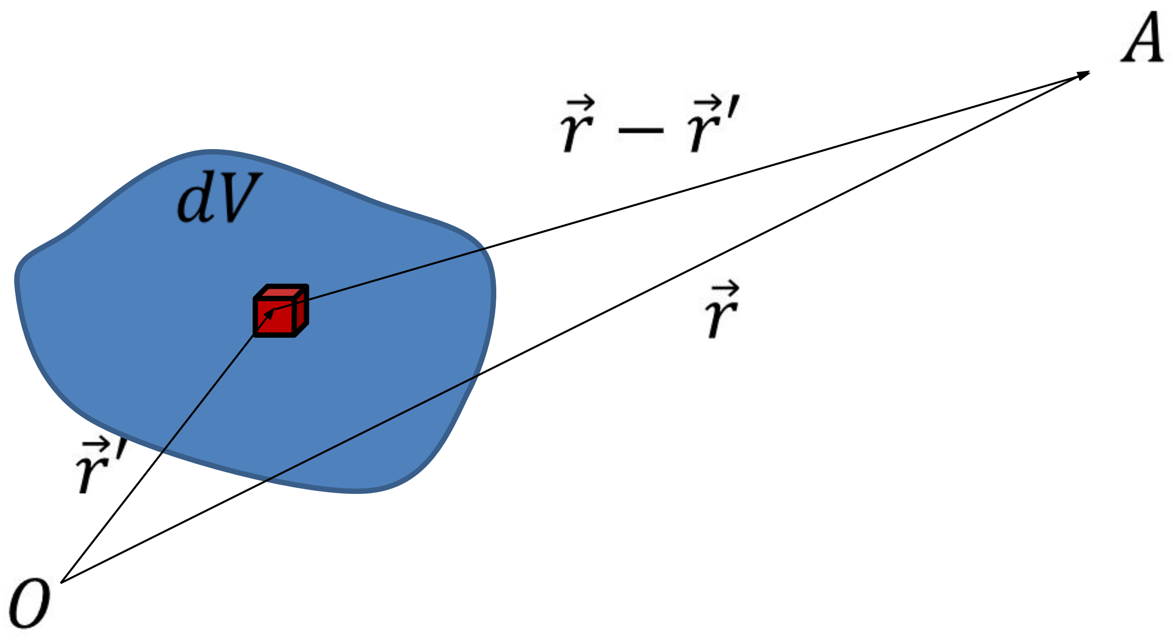
Объёмная плотность заряда.

- Для характеристики распределения зарядов по пространству вводят понятие объёмной плотности заряда.
- Определение.
- Объёмной плотностью заряда называется физическая величина, численно равная заряду единицы объёма.

Следствия из определения.

- Обозначается ρ и по определению равна:
- $\rho = \frac{dq}{dV}$
- Из определения следует:
- 1.Плотность заряда – скаляр;
- 2.Разменрность плотности заряда:
- $[\rho] = \frac{[q]}{[V]} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^3}$

Схема расчёта



Элемент заряда

- Выделим внутри системы зарядов элементарный объём dV, размеры которого малы во всех направлениях. Этому объёму будет соответствовать элементарный заряд
- $dq = \rho dV$

Элемент потенциала

- Благодаря малости размеров этого заряда, его можно считать точечным, и для определения потенциала поля, которое он создаёт, можно воспользоваться формулой потенциала точечного заряда. При этом нужно иметь в виду, что потенциал, который создаёт элементарный заряд, также будет элементарным:
- $d\varphi = k\frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = k\frac{\rho dV}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Полный потенциал всей системы зарядов.

- Чтобы найти потенциал поля, создаваемого всей системой зарядов, нужно проинтегрировать по всему объёму:
- $\varphi = \iiint_V \ k \frac{\rho dV}{|\vec{r}-\vec{r}\prime|}$
- Эта формула и представляет собой формулу прямого расчёта поля системы зарядов.
- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

Поверхностная система зарядов.

- Расчёт поля с помощью прямого метода бывает сложным.
- Иногда расчёт упрощается, если система зарядов имеет специальную форму.
- Например – поверхностная система зарядов.

Поверхностная система зарядов

- Определение.
- Система зарядов, расположенная на некоторой поверхности, называется поверхностной системой зарядов.

Поверхностная плотность зарядов.

- Определение.
- Поверхностной плотностью заряда называется физическая величина, численно равная заряду единицы площади поверхности.
- Обозначается поверхностная плотность σ, и по определению она равна:
- $\sigma = \frac{dq}{dS}$

Следствия из определения.

- Из определения следует:
- 1.Поверхнстная плотность – скаляр;
- 2.Размерность:
- $[\sigma] = \frac{[q]}{[S]} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$

Потенциал поверхностной системы зарядов.

- С помощью понятия поверхностной плотности напряжённость поля, создаваемого поверхностной системой зарядов, может быть рассчитана по формуле:
- $\varphi = \iint_S \; k \frac{\sigma dS}{|\vec{r}-\vec{r}\prime|}$
- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

Линейная система зарядов

- Определение.
- Система зарядов, расположенных на некоторой кривой линии, называется линейной системой зарядов.

Линейная плотность зарядов.

- Определение.
- Линейной плотностью заряда называется физическая величина, численно равная заряду единицы длины кривой, на которой расположен заряд.

Следствия из определения.

- Обозначается линейная плотность λ и по определению равна:
- $\lambda = \frac{dq}{dl}$
- Из определения следует:
- 1.Линейная плотность – скаляр;
- 2.Размерность:
- $[\lambda] = \frac{[q]}{[l]} = \frac{\text{Кл}}{\text{м}}$

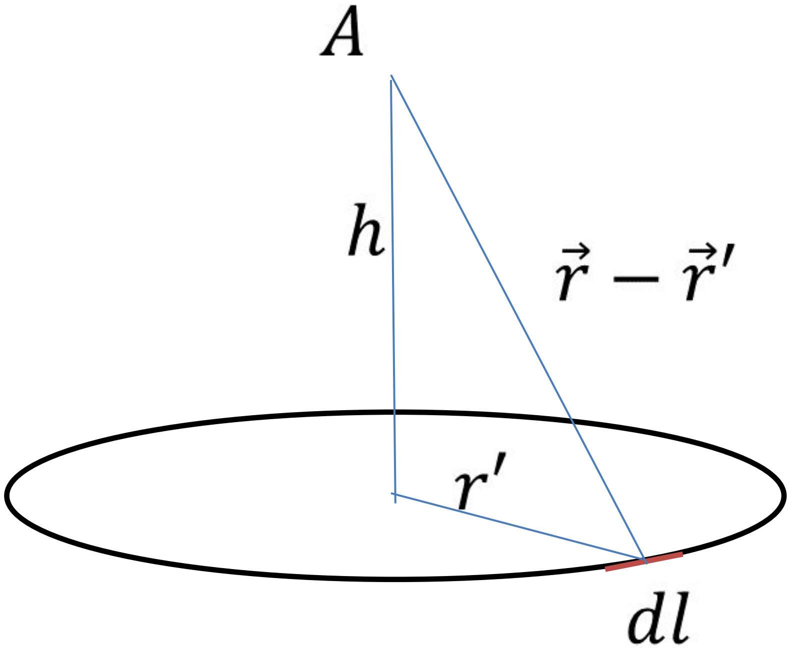
Потенциал линейной системы зарядов.

- С помощью линейной плотности потенциал линейной системы зарядов можно найти по формуле:
- $\varphi = \int_L k \frac{\lambda dl}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$
- $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$

Потенциал поля заряженного кольца.

- Пусть заряд расположен на окружности. Требуется найти потенциал, создаваемый таким зарядом на прямой, проходящей через центр окружности, перпендикулярно её плоскости. Выделим на окружности элемент длины dl и обозначим расстояние от точки наблюдения до центра окружности через h, как показано на рисунке:

Схема расчёта



Преобразование формул

- Расстояние от элемента окружности до точки наблюдения равно:
- $|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{h^2 + r'^2}$
- и остаётся неизменным в процессе интегрирования. Так что интеграл будет равен:
- $\varphi = k \frac{\lambda}{\sqrt{h^2+r'^2}} \int_L \ dl = \frac{2\pi r' k\lambda}{\sqrt{h^2+r'^2}}$

Поле в центре кольца.

- В частности в центре окружности:
- $\varphi = 2\pi k\lambda$

Напряжённость поля кольца

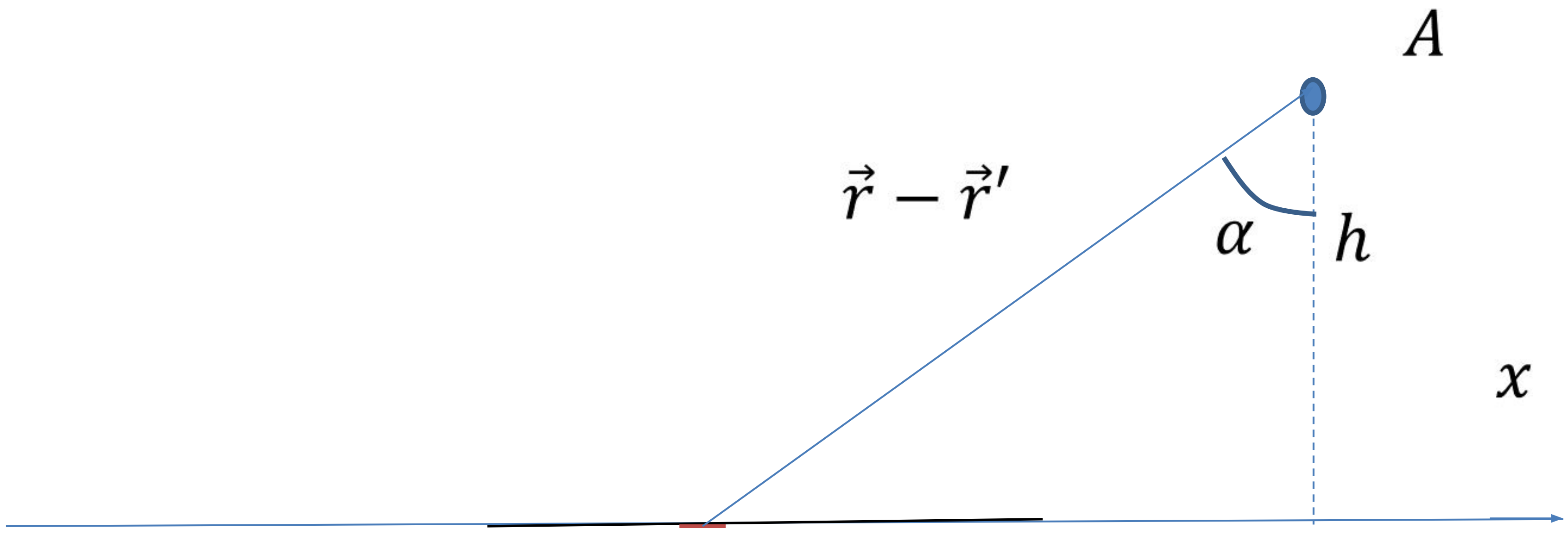
- Найдём проекцию напряжённости электрического поля на направление перпендикуляра к плоскости окружности, проходящего через центр.
- $E_h = -\frac{\partial \varphi}{\partial h} = \frac{2\pi r' k\lambda h}{\left(h^2+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{kqh}{(h^2+r'^2)^{3/2}}$

Поле на больших расстояниях от кольца.

- Из этой формулы в частности следует: если $h \to \infty$, то формула превращается в формулу напряжённости точечного заряда:
- $E_h = \frac{kq}{h^2}$
- Это частный случай более общего утверждения, что на больших расстояниях поле любой системы зарядов можно считать полем точечного заряда.

Потенциал заряженного отрезка прямой

- Найдём теперь потенциал однородно заряженного отрезка прямой, как показано на рисунке:



Потенциал отрезка

- Для этого снова воспользуемся общей формулой потенциала для линейной системы зарядов с учётом того, что отрезок расположен вдоль оси ox. При этом начало оси совпадает с основанием перпендикуляра из точки наблюдения на ось.
- $\varphi = \int_L \; k\frac{\lambda dx}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Преобразования.

- Здесь
- $|\vec{r}-\vec{r}'| = \frac{h}{cos\alpha}$
- $x = htg\alpha, dx = \frac{hd\alpha}{cos^2\alpha}$

Расчёт интеграла

- Подставим это всё в формулу потенциала:
- $\varphi = \int_L \ k \frac{cos\alpha}{h} \frac{\lambda h d\alpha}{cos^2\alpha} = k\lambda \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{cos\alpha}$
- Этот интеграл табличный, он равен:
- $\varphi = k\lambda \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{cos\alpha} = \frac{k\lambda}{2} ln \left(\frac{1+sin\alpha_2}{1-sin\alpha_2} \frac{1-sin\alpha_1}{1+sin\alpha_1} \right)$

Замена тригонометрических функций.

- Заменим тригонометрические функции отношением соответствующих отрезков:
- $sin\alpha_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+h^2}},\ sin\alpha_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+h^2}}$
- Здесь x_1 – координата левого конца отрезка, x_2 – то же самое только для правого конца отрезка.

Преобразования формул.

- Тогда формулу потенциала можно преобразовать следующим образом:
- $\varphi = \frac{k\lambda}{2} ln\left(\frac{1+\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+h^2}}}{1-\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+h^2}}} \frac{1-\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+h^2}}}{1+\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+h^2}}}\right)$

Потенциал заряженного отрезка.

- Упростим выражение, приведя к общему знаменателю во всех членах дробей:
- $\varphi = \frac{k\lambda}{2} ln\left(\frac{\sqrt{x_2^2+h^2}+x_2}{\sqrt{x_2^2+h^2}-x_2}\frac{\sqrt{x_1^2+h^2}-x_1}{\sqrt{x_1^2+h^2}+x_1}\right)$
- Так выражается потенциал отрезка прямой.

Потенциал над серединой отрезка

- В частности, если точка наблюдения находится над серединой отрезка:
- $x_1 = -\frac{l}{2}, x_2 = \frac{l}{2}$

Потенциал над серединой отрезка

- Тогда формула потенциала упрощается:

- $\varphi = \frac{k\lambda}{2} ln\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} + \frac{l}{2}}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} - \frac{l}{2}} \frac{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} + \frac{l}{2}}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} - \frac{l}{2}}\right) =$

- $= k\lambda ln\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} + \frac{l}{2}}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2} - \frac{l}{2}}\right)$

Предельные случаи.

- Отсюда, в частности, следует, что при
- $h \to \infty$ потенциал стремится к нулю, при $h \to 0$ потенциал стремится к плюс бесконечности.

Потенциал для бесконечного отрезка

- Найдём потенциал бесконечного отрезка. Для этого будем считать, что длина отрезка на много больше расстояния до точки наблюдения. Тогда в числителе параметром h можно пренебречь.

Преобразование знаменателя.

- В знаменателе этим параметром пренебречь нельзя, т.к. в этом случае знаменатель обращается в нуль. В знаменателе мы воспользуемся приближением , бинома Ньютона:
- $(1 + dx)^{\alpha} \approx 1 + \alpha dx$

Преобразование формул

-
- Для этого вынесем $\left(\frac{l}{2}\right)^2$ из-под знака корня:
- $\varphi = k\lambda ln\left(\frac{l}{\frac{l}{2}\sqrt{1+(\frac{2h}{l})^2}-\frac{l}{2}}\right) =$
- $= k\lambda ln\left(\frac{l}{\frac{l}{2}\left[1+\frac{1}{2}(\frac{2h}{l})^2\right]-\frac{l}{2}}\right) = k\lambda ln\left(\frac{l^2}{h^2}\right) = 2k\lambda ln\frac{l}{h}$

Разность потенциалов в двух точках пространства около заряженной прямой.

- Из этой формулы в частности следует, что разность потенциалов в двух точках, находящихся на расстоянии h_1 и h_2 от прямой находится по формуле:
- $\Delta\varphi = 2k\lambda ln\frac{h_1}{h_2}$

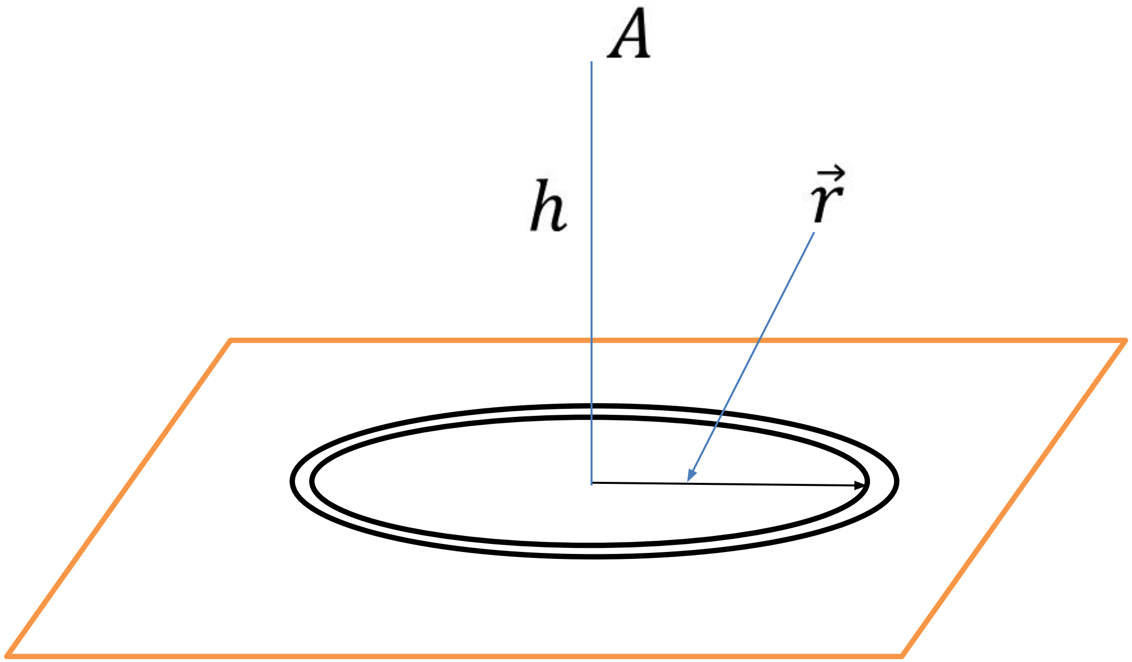
Напряжённость поля заряженной прямой.

- Снова найдём проекцию напряжённости электрического поля на направление перпендикуляра к прямой.
- $E_h = -\frac{\partial \varphi}{\partial h} = -2k\lambda \frac{h}{l}\left(-\frac{l}{h^2}\right) = \frac{2k\lambda}{h}$
- Напряжённость вблизи бесконечного заряженного отрезка обратно пропорциональна расстоянию от прямой до точки наблюдения.

Заряженная плоскость.

- Найдя потенциал поля заряженной окружности, можно найти поле заряженной плоскости. Для этого в плоскости выделим кольцо радиуса r и шириной dr с центром, расположенным под точкой наблюдения, как показано на рисунке.

Схема расчёта



Потенциал поля окружности

- Согласно формуле определения потенциала окружности:
- $\varphi = \frac{2\pi r' k \lambda}{\sqrt{h^2 + r'^2}} = \frac{qk}{\sqrt{h^2 + r'^2}}$
- q – это полный заряд всей окружности. В нашем случае кольцо можно считать окружностью, т.к. его толщина элементарна.

Элемент поля, создаваемого кольцом

- Кроме того, заряд, который ему соответствует и потенциал, который он создаёт, также элементарны. Так что:
- $d\varphi = k\frac{dq}{\sqrt{h^2+r^2}} = k\frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{h^2+r^2}}$
- Чтоб найти полный потенциал, нужно проинтегрировать. Но сначала будем считать, что плоскость не бесконечно большая, а представляет собой круг достаточно большого радиуса R.

Преобразование формул

- Тогда интегрирование нужно вести в пределах от нуля и до радиуса большого круга.
- $\varphi = \int_0^R k \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{h^2+r^2}} = 2\pi k\sigma\sqrt{h^2+r^2}\Big|_0^R =$
- $= 2\pi k\sigma(\sqrt{h^2+R^2} - h)$

Предельные случаи

- Это и есть формула потенциала заряженного круга над его центром. Из неё, в частности, следует: если $h \to \infty$, то потенциал стремится к нулю, если $h \to 0$, то потенциал стремится к конечной величине:
- $\varphi = 2\pi k\sigma R$. Если при этом и радиус круга стремится к бесконечности, то и потенциал стремится к бесконечности.

Потенциал для бесконеченой плоскости

- Если радиус круга на много больше, чем h, круг можно считать бесконечной плоскостью, а величиной h под корнем можно пренебречь, и формула потенциала упростится:
- $\varphi = 2\pi k\sigma(R - h)$

Разность потенциалов.

- Из этой формулы, в частности следует, что разность потенциалов в двух точках, находящихся на расстояниях h_1 и h_2, равна:
- $\Delta\varphi = 2\pi k\sigma(h_2 - h_1)$

Напряжённость бесконечной плоскости.

- Найдём напряжённость электрического поля круга над его центом на небольшом расстоянии.
- $E_h = -\frac{\partial \varphi}{\partial h} = 2\pi k \sigma = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$