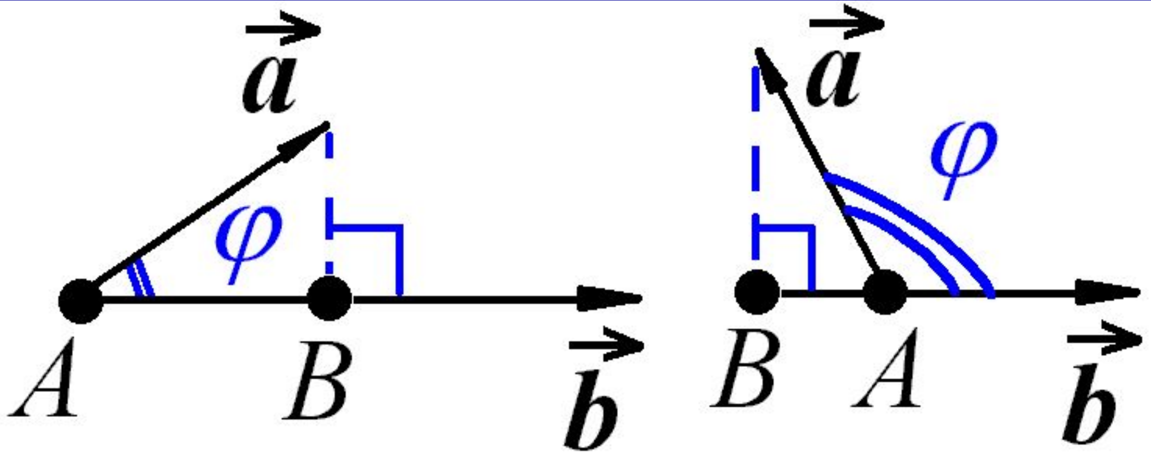
Лекция № 4

Определение. **Проекция** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$: $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$ есть число

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$$

Если угол между векторами $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *– угол* φ *– есть угол острый, то* $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} > 0.$ *Если* φ *– тупой, то* $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} < 0.$



$$\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = \pm|AB|$$

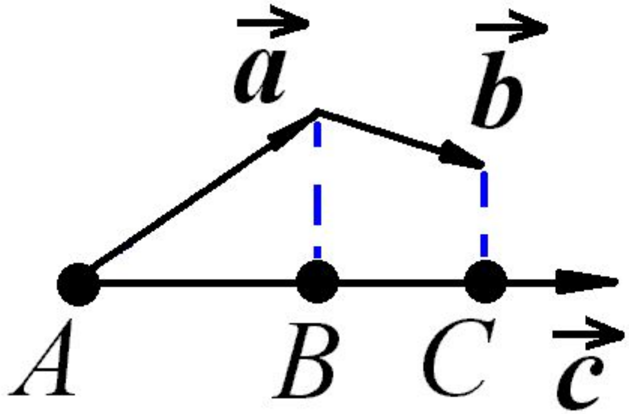
Свойства проекции вектора на вектор:

проекция суммы равна сумме проекций

$$\text{пр}_{\vec{c}}\,(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{b}\ ;$$

числовой сомножитель можно выносить за знак проекции

$$\text{пр}_{\vec{b}}\,(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$$



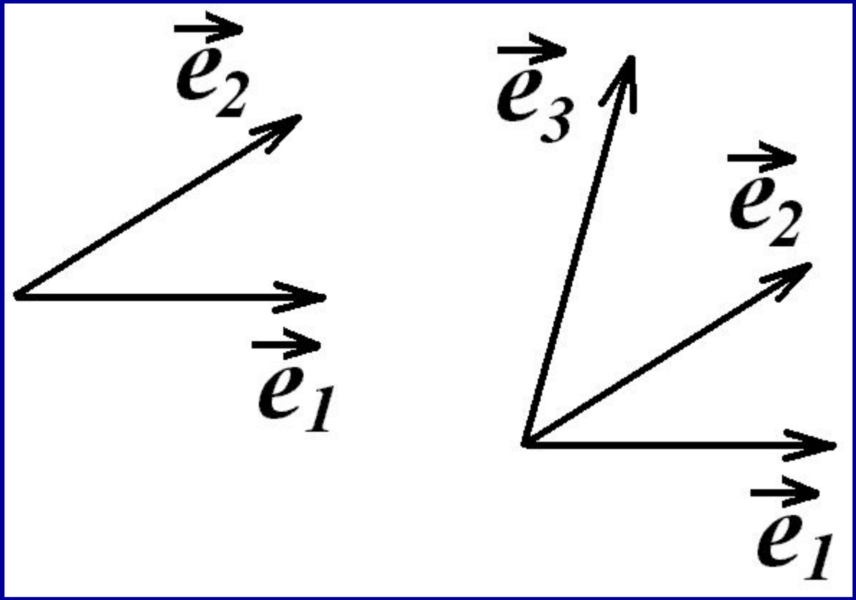
$$\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}+\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}$$

Разложение вектора по базису

Определение. **Базисом на плоскости** называются любые два неколлинеарных вектора

$$\vec{e_1}, \quad \vec{e_2}: \quad \vec{e_1} \not\parallel \vec{e_2}$$

Определение. **Базисом в пространстве** называются любые три вектора $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, не лежащие в одной плоскости, т.е. не компланарные.



Из определений следует, что среди векторов, образующих базис, заведомо нет нулевых векторов:

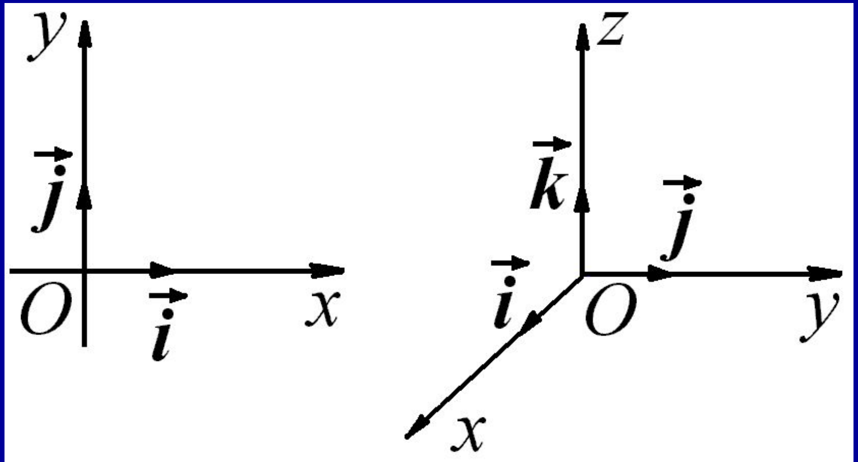
$$|\vec{e_i}| \neq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Если $|\vec{e}_i| = 1, i = 1, 2, 3$, то базис называется **единичным**. Если

$$\vec{e_1} \perp \vec{e_2}, \quad \vec{e_1} \perp \vec{e_3}, \quad \vec{e_2} \perp \vec{e_3},$$

то базис называется **ортогональным** или **декартовым**. Векторы $\vec{e_1} = \vec{i}$, $\vec{e_2} = \vec{j}$, $\vec{e_3} = \vec{k}$ образуют единичный декартов базис на плоскости и в пространстве:

$$\vec{i}, \quad \vec{j}, \quad \vec{k} : \quad |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \quad \vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{i} \perp \vec{k}, \quad \vec{j} \perp \vec{k}$$



Теорема. *Любой вектор можно разложить по базису, причем единственным образом, т.е. для любого вектора $\vec{a}$ существует единственный набор из трех чисел a_1, a_2, a_3 такой, что справедливо равенство*

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}, \tag{1}$$

вектор $\vec{a}$ линейно выражается через векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.

Определение. Числа a_1, a_2, a_3 – **координаты** вектора $\vec{a}$, представление (1) называется **разложением вектора $\vec{a}$ по заданному базису $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$,**

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} = \{a_1; a_2; a_3\} \tag{2}$$

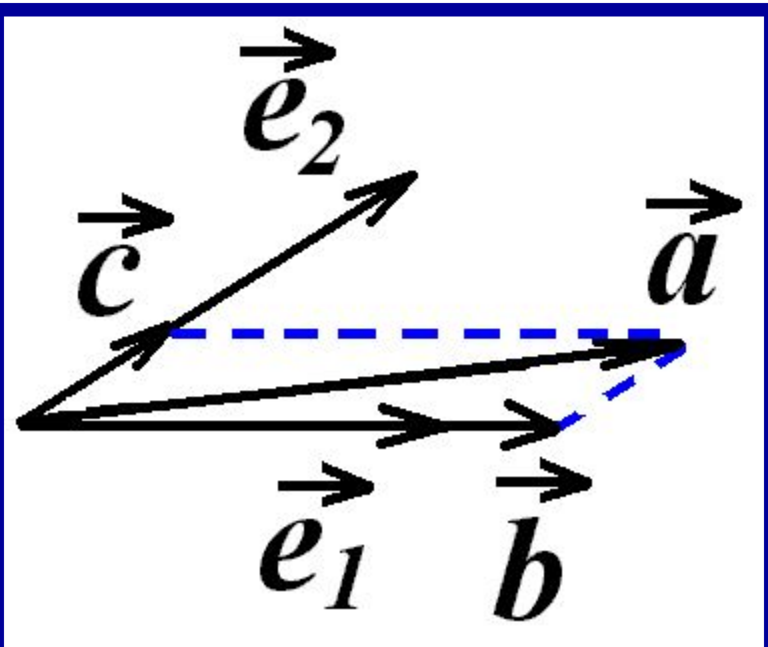
т.е. **вектор задан своими координатами.**

Вместо геометрического объекта – вектора рассматривается математический объект – упорядоченная тройка чисел **координаты вектора.**

Доказательство сначала для случая плоскости:
векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{a}$ проводятся из общего начала;
из конца вектора $\vec{a}$ проводятся прямые, параллельные базисным векторам;
определяются вектора $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c},\ \vec{b} \parallel \vec{e_1} \Longrightarrow \vec{b} = a_1 \vec{e_1},\ \vec{c} \parallel \vec{e_2} \Longrightarrow \vec{c} = a_2 \vec{e_2}$$

$$\vec{a} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2}$$



Случай пространства:

$$\vec{a} = \vec{d} + \vec{f}$$

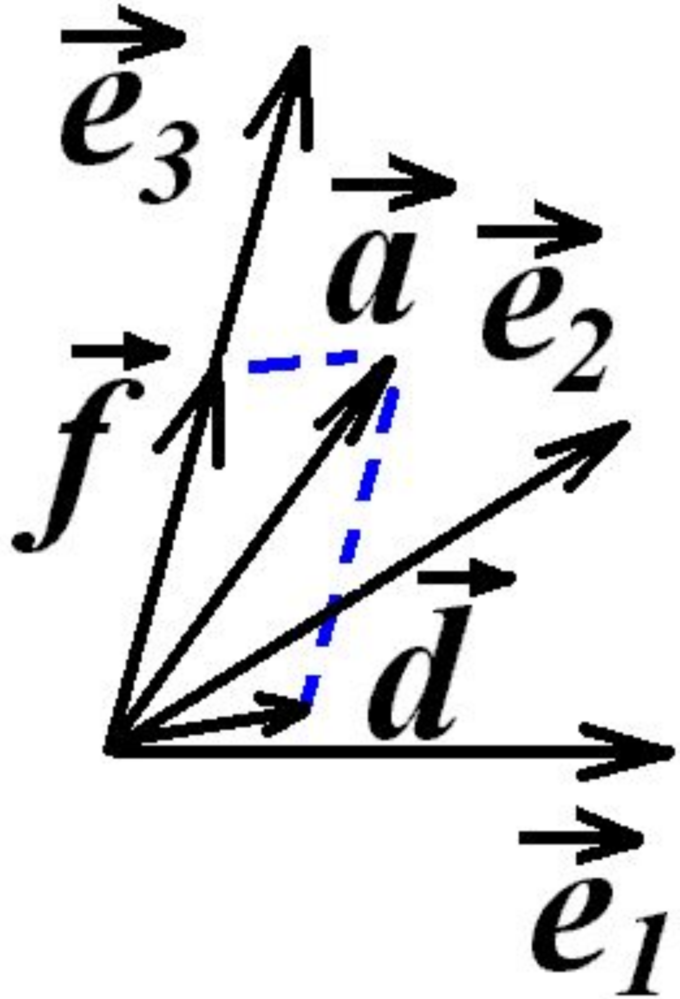
$\vec{d}$ в плоскости векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$

$$\vec{d} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2};$$

$\vec{f} \| \vec{e_3}$; $\vec{f} = a_3\vec{e_3}$

т.е.

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} =$$
$$= \{a_1, a_2, a_3\}$$



Пусть базис декартов: $\vec{e_1} = \vec{i}$, $\vec{e_2} = \vec{j}$, $\vec{e_3} = \vec{k}$

$$a_1 = \text{пр}_{\vec{i}}\, \vec{a}, \quad a_2 = \text{пр}_{\vec{j}}\, \vec{a}, \quad a_3 = \text{пр}_{\vec{k}}\, \vec{a}$$

Определение.

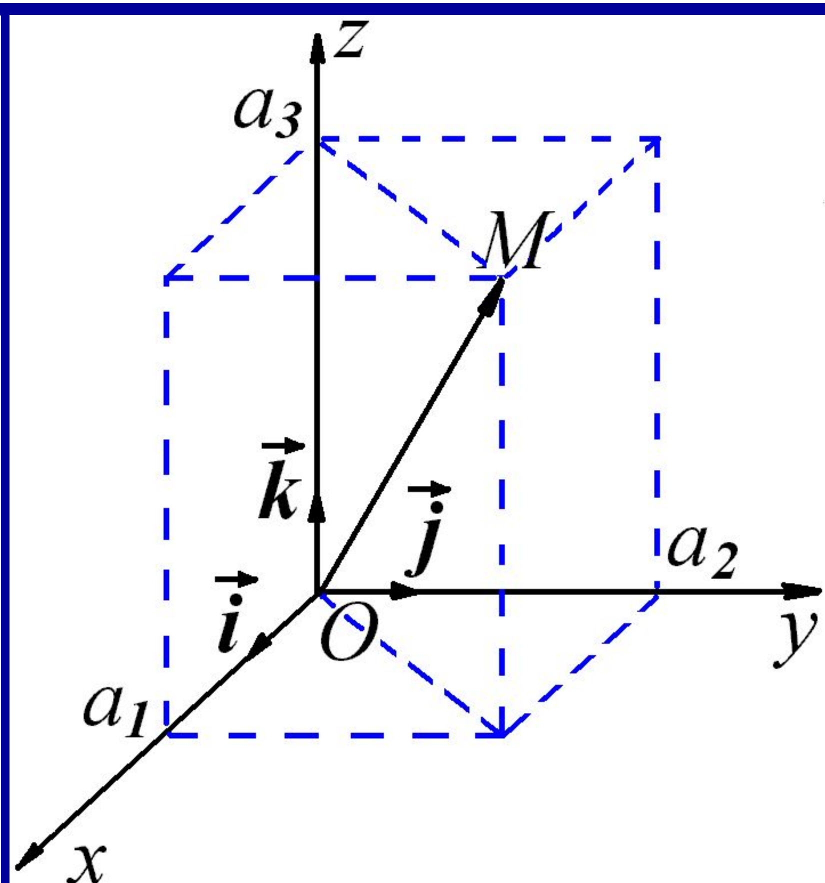
Если начало вектора $\vec{a}$ помещено в **начало координат** O, то вектор $\vec{a}$ называют **радиус-вектором**

$M(a_1, a_2, a_3)$ — точка;

$\overrightarrow{OM} = \{a_1; a_2; a_3\}$ – вектор

по теореме Пифагора

$$|\overrightarrow{OM}| = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



Линейные операции над векторами, заданными своими координатами

Теорема. **Равенство векторов.** *Вектор* $\overrightarrow{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ *равен вектору* $\overrightarrow{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ *тогда и только тогда, когда равны соответствующие координаты этих векторов*

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \iff a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3$$

Доказательство:

$$\overrightarrow{a} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}; \quad \overrightarrow{b} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$$

по условию теоремы

$$a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$$

из единственности разложения вектора по базису

$$a_1 = b_1; \quad a_2 = b_2; \quad a_3 = b_3$$

Теорема. **Умножение вектора на число.** *Чтобы вектор* $\overrightarrow{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ *умножить на число* λ, *надо каждую координату исходного вектора умножить на это число*

$$\lambda\overrightarrow{a} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\}$$

$$\overrightarrow{b} = \{\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3\} || \overrightarrow{a}$$

Теорема. **Параллельность векторов.** *Векторы* $\overrightarrow{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ *и* $\overrightarrow{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$ *параллельны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны*

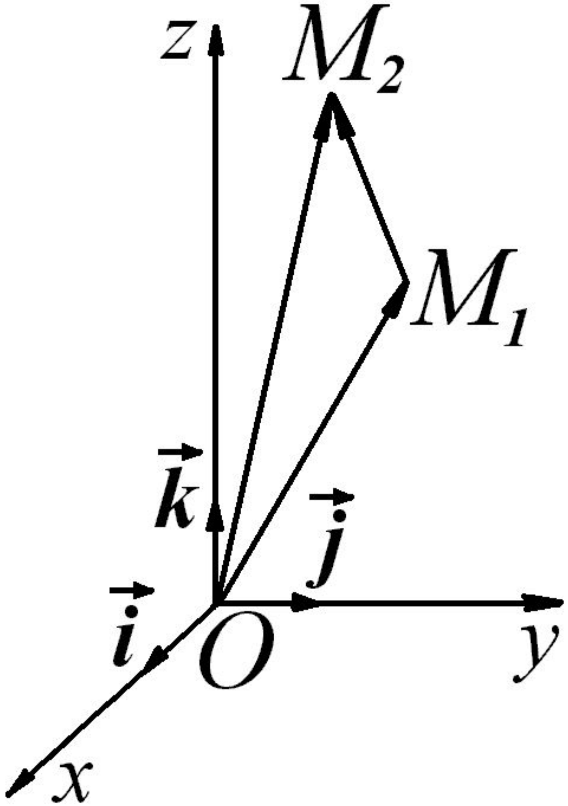
$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda$$

Теорема. **Сложение и вычитание векторов.** *Чтобы сложить (вычесть) векторы* $\overrightarrow{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$ *и* $\overrightarrow{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$, *надо сложить (вычесть) соответствующие координаты*

$$\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = \{a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3\}$$

Теорема. **Определение вектора через координаты его начала и конца.** *Если у вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *известны координаты начальной точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и конечной точки* $M_2(x_2, y_2, z_2)$, *то для определения координат вектора* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *надо из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала вектора*

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$



$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

т.к :
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

Длина вектора

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| =$$

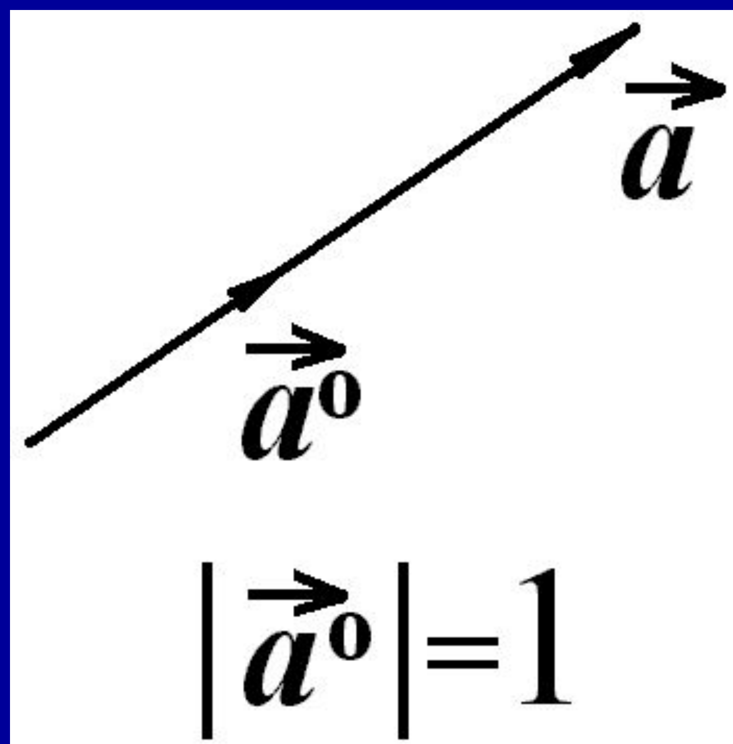
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Орт и направляющие косинусы вектора

Определение. Пусть задан не нулевой вектор $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$, $|\vec{a}| \neq 0$. **Орт** вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a^o}$

$$|\vec{a^o}| = 1, \quad \vec{a^o} \uparrow\uparrow \vec{a}$$

$$\boxed{\vec{a^o} = \frac{1}{|\vec{a}|}\{a_1; a_2; a_3\} = \left\{\frac{a_1}{|\vec{a}|}; \frac{a_2}{|\vec{a}|}; \frac{a_3}{|\vec{a}|}\right\}}$$



$$\vec{a^{o}} = \frac{1}{|\vec{a}|}\{a_1; a_2; a_3\} = \left\{\frac{a_1}{|\vec{a}|}; \frac{a_2}{|\vec{a}|}; \frac{a_3}{|\vec{a}|}\right\}$$

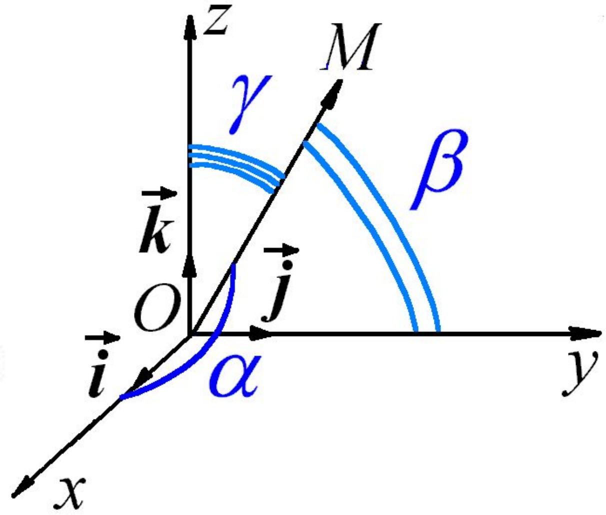
Т.к. $\lambda = \dfrac{1}{|\vec{a}|} > 0,$ то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a^{o}}$

$$|\vec{a^{o}}| = \sqrt{\frac{a_1^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_2^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_3^2}{|\vec{a}|^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\vec{a}|^2}} = \sqrt{\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2}} = 1$$

Орт задает направление вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a^o} ,$$



Пусть $\vec{a}$ помещен в начало координат, т.е.

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM}$$

Определение. Углы α, β, и γ, которые вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ составляет с осями координат называются **направляющими углами**. Косинусы этих углов: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{a}$.

$$a_1 = \text{пр}_{\vec{i}}\, \vec{a} = |a| \cos\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|},$$

$$a_2 = \text{пр}_{\vec{j}}\, \vec{a} = |a| \cos\beta, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|},$$

$$a_3 = \text{пр}_{\vec{k}}\, \vec{a} = |a| \cos\gamma, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|},$$

поэтому

$$\boxed{\vec{a^o} = \left\{ \frac{a_1}{|\vec{a}|}; \frac{a_2}{|\vec{a}|}; \frac{a_3}{|\vec{a}|} \right\} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}}$$

Т.к. $|\vec{a^o}| = 1$, то и квадрат его длины также равен единице

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

С векторами можно производить и **нелинейные** операции, например, различные умножения.

Из всех возможных произведений векторов ниже будут рассмотрены три:

скалярное, **векторное** и **смешанное**.

Скалярное произведение векторов

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\,\vec{b}$$

Определение. Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})}$$

$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \varphi - \text{угол между } \vec{a},\ \vec{b}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$

Результатом **скалярного** произведения является **число**, т.е. **скалярная величина**.

Теорема. **Свойства скалярного произведения**. *Имеют место следующие соотношения:*

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, тогда и только тогда, когда $\vec{a} \perp \vec{b}$;
2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$;
3. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
4. $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \lambda \vec{b}$, λ — число;
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \text{пр}_{\vec{b}}\, \vec{a} \cdot |\vec{b}| = \text{пр}_{\vec{a}}\, \vec{b} \cdot |\vec{a}|$;
6. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;
7. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \{a_1; a_2; a_3\} \cdot \{b_1; b_2; b_3\} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$;
   вид скалярного произведения через координаты сомножителей;
8. $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Доказательство.

1. Если $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, то $\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = 0$

Если $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{O}$ или $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{O}$, то по определению $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$

2.

$$(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}}) = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{a}| \cdot 1 = |\overrightarrow{a}|^2$$

3.

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = \cos\varphi = \cos(-\varphi) = \cos(\widehat{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}}) \implies \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}$$

4. Самостоятельно – два случая: $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$.

5. По определению

$$\text{пр}_{\overrightarrow{b}}\, \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}| \cos\varphi,$$

поэтому

$$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\varphi = |\overrightarrow{a}|\cos\varphi|\overrightarrow{b}| = \text{пр}_{\overrightarrow{b}}\, \overrightarrow{a}\,|\overrightarrow{b}|$$

6. $$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})|\vec{c}| =$$
$$= \left(\text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{b}\right)|\vec{c}| =$$
$$= \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{a}\,|\vec{c}| + \text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{b}\,|\vec{c}| = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$$

7. $$\vec{a}\cdot\vec{b} = \{a_1; a_2; a_3\}\cdot\{b_1; b_2; b_3\} =$$
$$= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) =$$
$$= a_1b_1\vec{i}\,\vec{i} + a_1b_2\vec{i}\,\vec{j} + a_1b_3\vec{i}\,\vec{k} +$$
$$+ a_2b_1\vec{j}\,\vec{i} + a_2b_2\vec{j}\,\vec{j} + a_2b_3\vec{j}\,\vec{k} +$$
$$+ a_3b_1\vec{k}\,\vec{i} + a_3b_2\vec{k}\,\vec{j} + a_3b_3\vec{k}\,\vec{k} =$$
$$= \left[\begin{array}{c} \vec{i}\,\vec{i} = \vec{j}\,\vec{j} = \vec{k}\,\vec{k} = 1 \\ \vec{i}\,\vec{j} = \vec{i}\,\vec{k} = \vec{j}\,\vec{k} = 0 \end{array}\right] =$$
$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

8. $$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \quad \Longrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

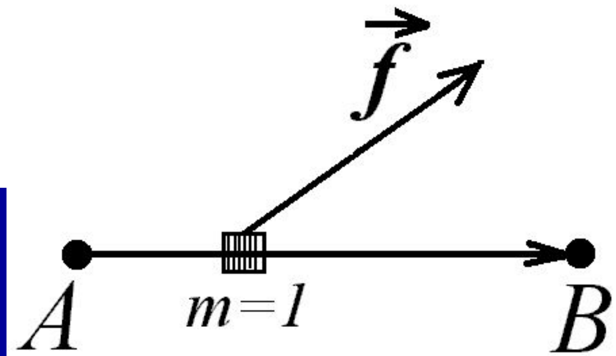
$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Механический смысл скалярного произведения. *Если тело единичной массы под дествием постоянной силы* $\vec{f}$ *перемещается из точки* A *в точку* B *вдоль прямой, то совершаемая при этом работа* W *есть скалярное произведение вектора силы на вектор перемещения:*

$$W = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{f}$$

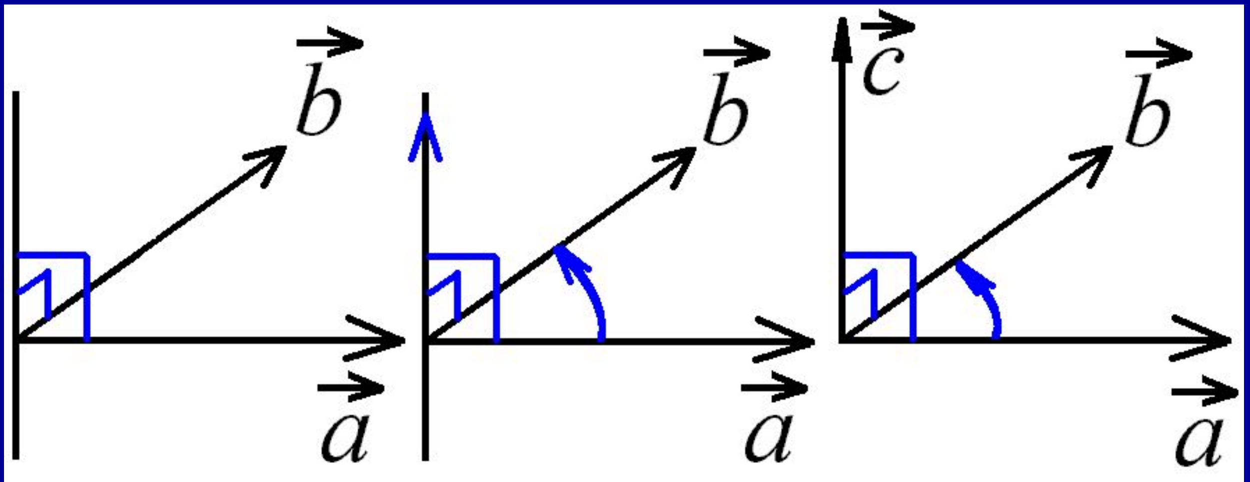


Векторное произведение векторов

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$

Определение. Результат векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть третий **вектор** $\vec{c}$: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ — однозначно определяемый следущими тремя условиями:

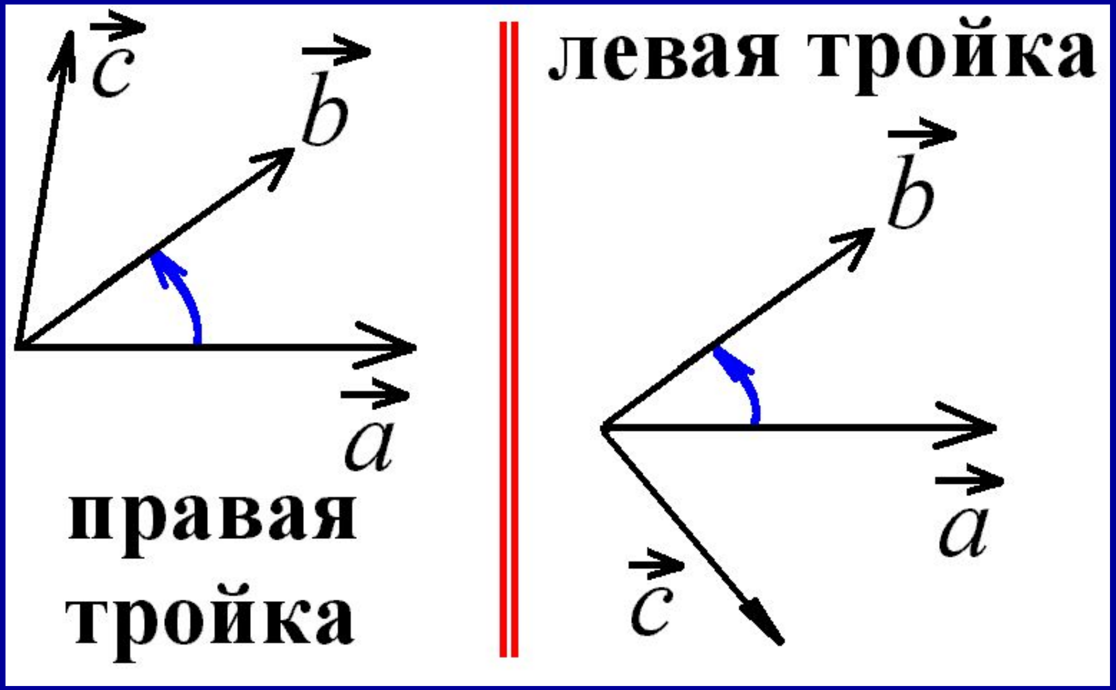
1. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;
2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая тройка векторов;
3. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$



Определение.

Тройка векторов называется **правой**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму из конца третьего вектора наблюдается **против хода часовой стрелки**.

Тройка векторов называется **левой**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму из конца третьего вектора наблюдается **по ходу часовой стрелки**.



Теорема. **Свойства векторного произведения**. *Имеют место следующие соотношения:*

1. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{O}$, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$;
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
3. $\lambda[\vec{a}, \vec{b}] = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$, λ — число;
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;
5. $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\diamond ABCD}$;
6. $\{a_1; a_2; a_3\} \times \{b_1; b_2; b_3\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Доказательство.

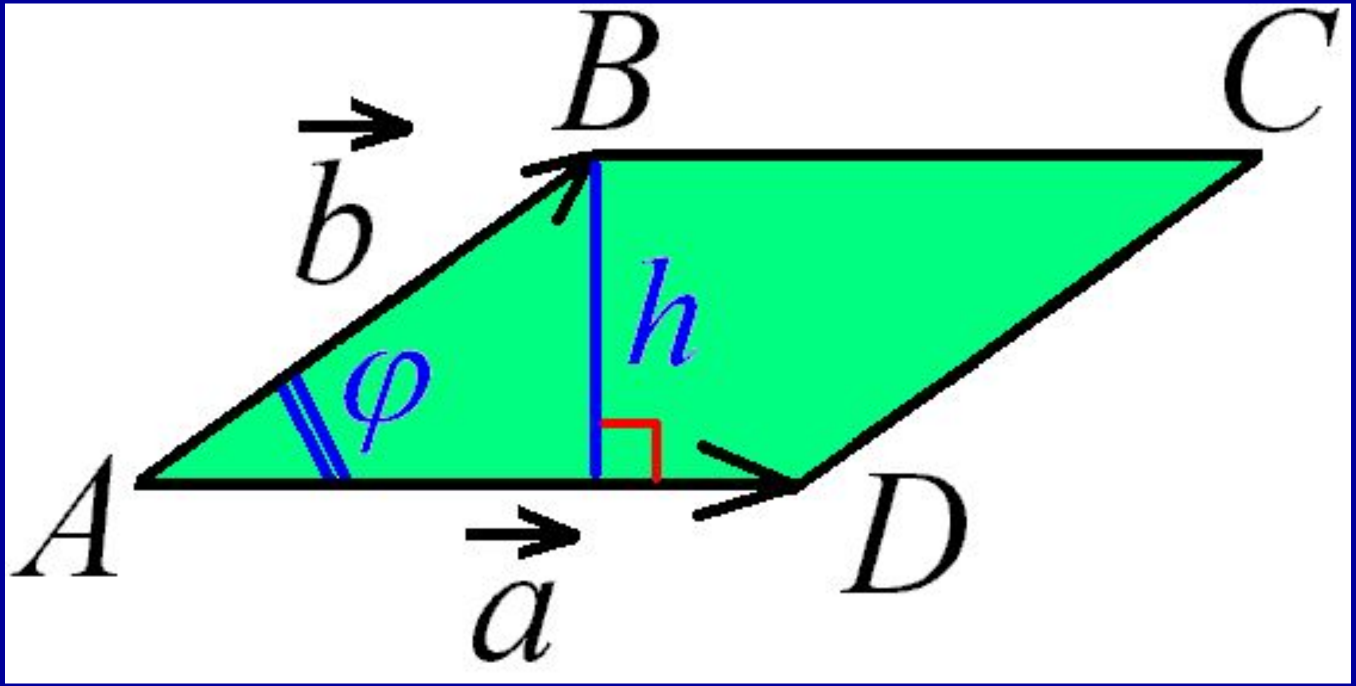
1. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\varphi = 0$, $\sin 0 = 0$.

2.

$$\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = -\widehat{(\vec{b}, \vec{a})} \implies \vec{b},\ \vec{a},\ -\vec{c} \quad \text{правая}$$

3,4 – без доказательства.

5. $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}| \cdot h = S_{\Diamond ABCD}$



6. Вид векторного произведения через координаты сомножителей – **правило для запоминания**

$$\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}, \quad \vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

определитель нужно раскрыть по первой строке

$$= \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + (-1)\vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} =$$

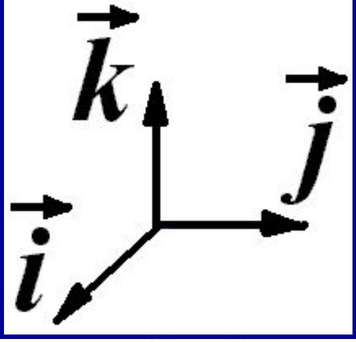
$$= c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k} = \{c_1; c_2; c_3\} = \vec{c}$$

Доказательство формулы:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_1 \overrightarrow{i} + a_2 \overrightarrow{j} + a_3 \overrightarrow{k}) \times (b_1 \overrightarrow{i} + b_2 \overrightarrow{j} + b_3 \overrightarrow{k}) =$$

$$= a_1 b_1 \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} + a_1 b_2 \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} + a_1 b_3 \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} +$$
$$+ a_2 b_1 \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} + a_2 b_2 \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} + a_2 b_3 \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} +$$
$$+ a_3 b_1 \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} + a_3 b_2 \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} + a_3 b_3 \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} =$$

$\times$	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{k}$	$-\overrightarrow{j}$
$\overrightarrow{j}$	$-\overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{i}$
$\overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{j}$	$-\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{0}$



$$= a_1 b_1 \overrightarrow{O} + a_1 b_2 \overrightarrow{k} + a_1 b_3 \left(\overrightarrow{-j}\right) +$$
$$+ a_2 b_1 \left(\overrightarrow{-k}\right) + a_2 b_2 \overrightarrow{O} + a_2 b_3 \overrightarrow{i} +$$
$$+ a_3 b_1 \overrightarrow{j} + a_3 b_2 \left(\overrightarrow{-i}\right) + a_3 b_3 \overrightarrow{O} =$$

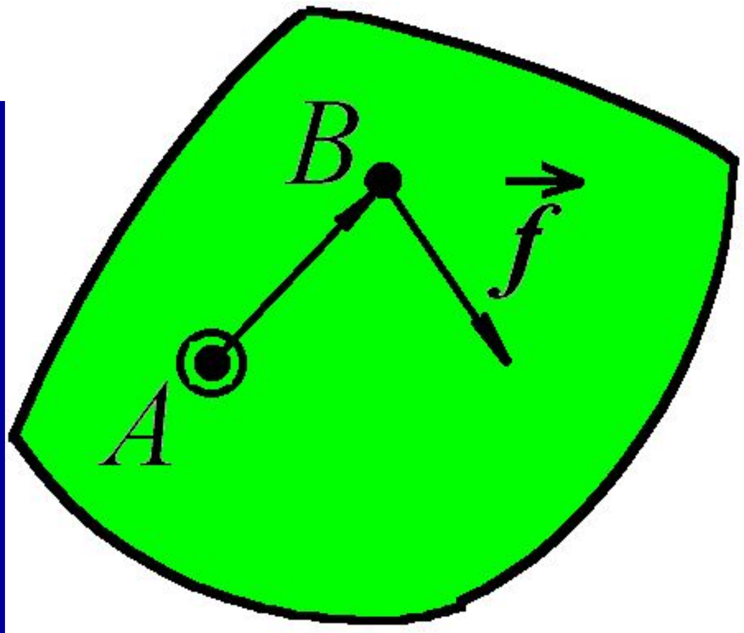
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\overrightarrow{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\overrightarrow{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\overrightarrow{k} =$$

$$= \overrightarrow{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \overrightarrow{j} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Механический смысл векторного произведения. Тело закреплено в точке A, в точке B приложена сила $\overrightarrow{f}$, поэтому тело крутится.

$$M_A\overrightarrow{f} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{f}$$

$\overrightarrow{AB}$ – вектор-плечо



Смешанное произведение

Определение. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$ – вектор; $\vec{d} \cdot \vec{c}$ – число;

результат смешанного произведения – **число, скаляр**

Вид через координаты сомножителей

Пусть $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$

$$(\vec{a} \times \vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \boxed{c_1 \; c_2 \; c_3} \end{vmatrix} = c_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 = \vec{d} \cdot \vec{c};$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d} = \{d_1\, d_2, d_3\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произведения:

1.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Если определитель раскрыть по первой строке, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{f} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

2.

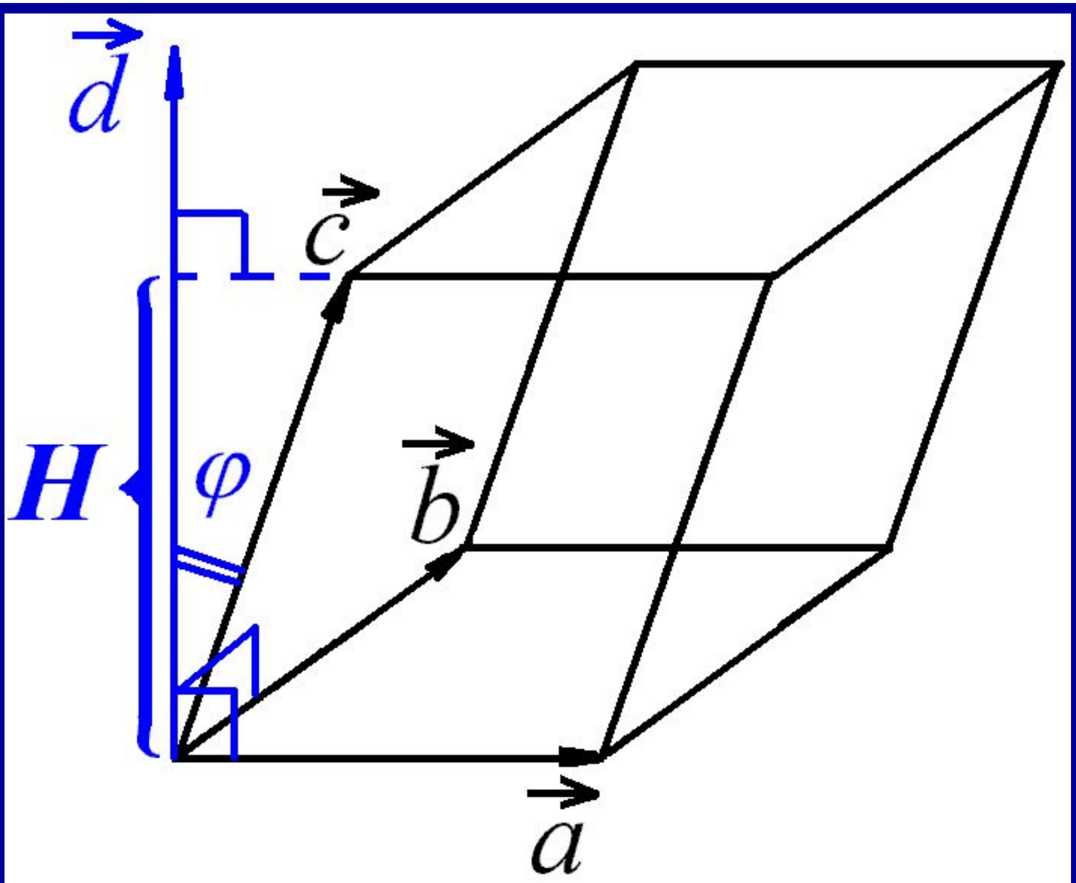
$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}$$

по свойству определителей.

3. $\quad \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \pm V_{\text{пар}} = \pm 6V_{\text{пир}}$

$V_{\text{пар}}$ – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{d}\,\vec{c} = |\vec{d}||\vec{c}|\cos\varphi = S_{\Diamond ABCD} \cdot (\pm H) = \pm V_{\text{пар}}$$



$V_{\text{пир}}$ – объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{\Diamond ABCD} \cdot H = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{пар}}$$

4. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$ тогда и только тогда, когда все три вектора лежат в одной плоскости, т.е. компланарны.

Механического смысла у смешанного произведения **нет**.