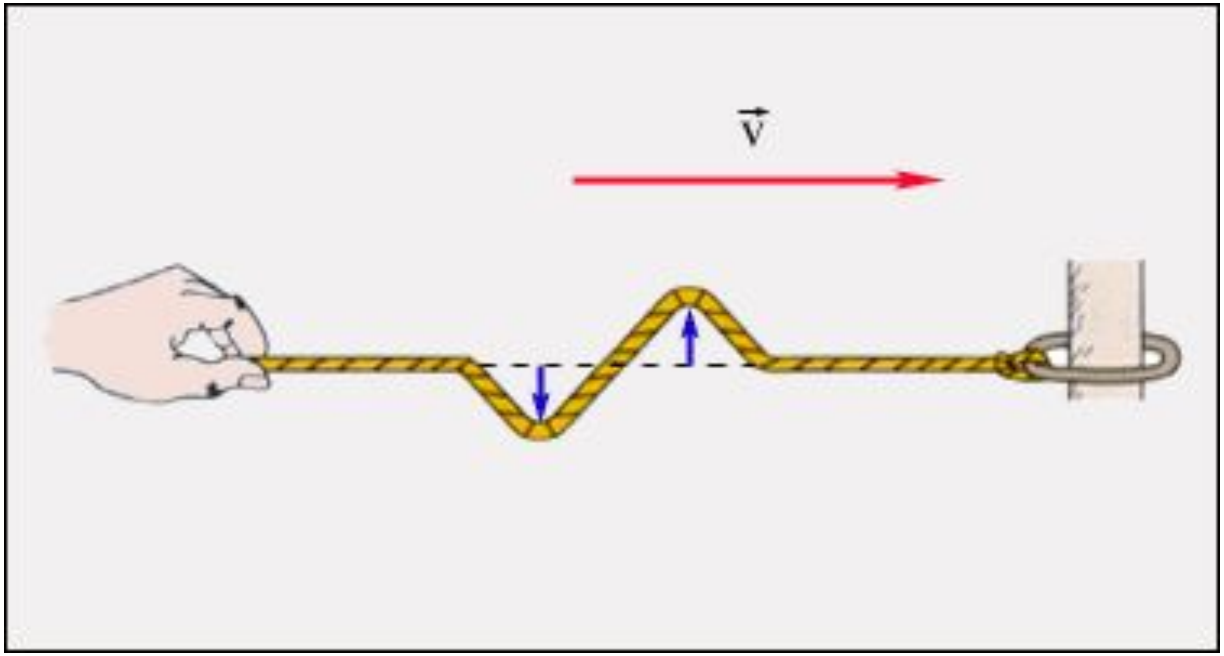
ВОЛНЫ

ВИДЫ ВОЛН.
УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛН.

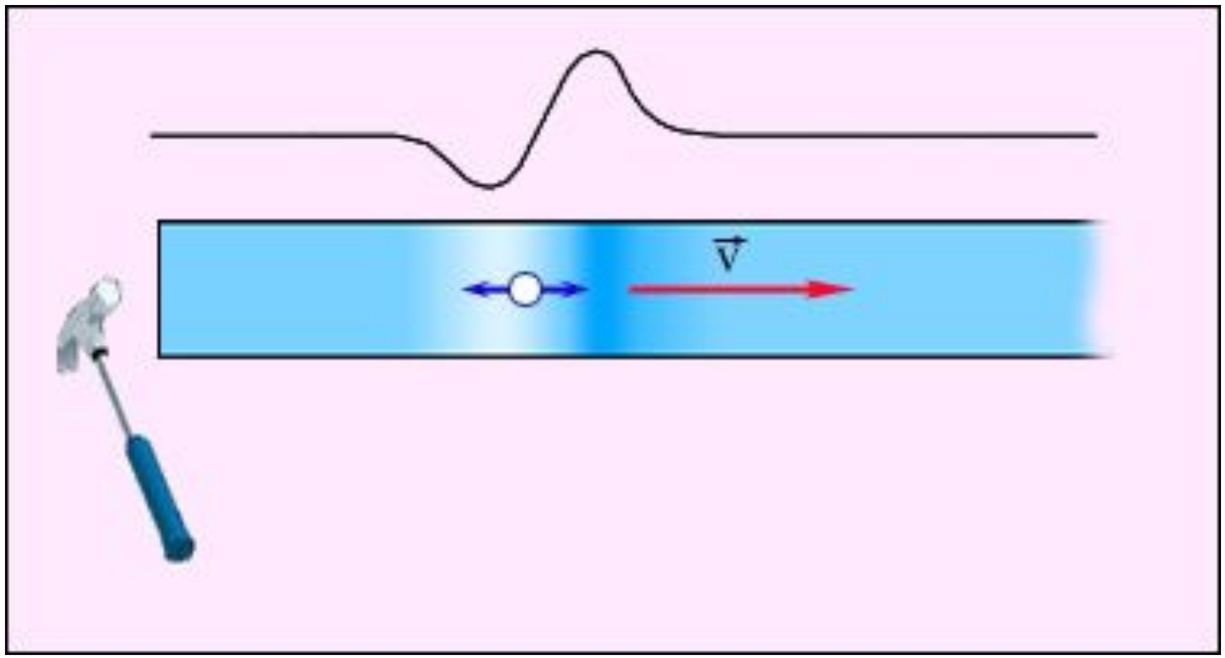
Волна - процесс распространения колебаний в пространстве.

Виды волн:

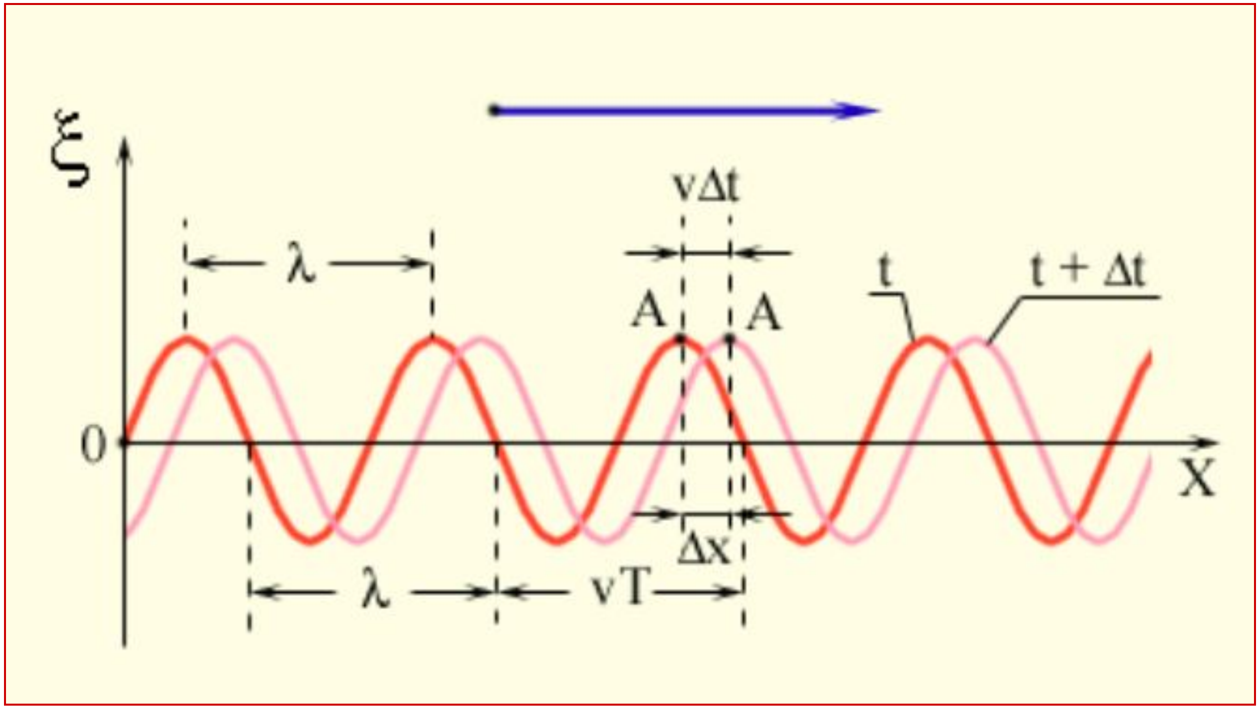
- продольные;
- поперечные.



Распространение поперечного волнового импульса по натянутому резиновому жгуту.



Распространение продольного волнового импульса по упругому стержню.



“Моментальные фотографии” бегущей синусоидальной волны в момент времени t и t + Δt.

λ - длина волны; [λ] = м

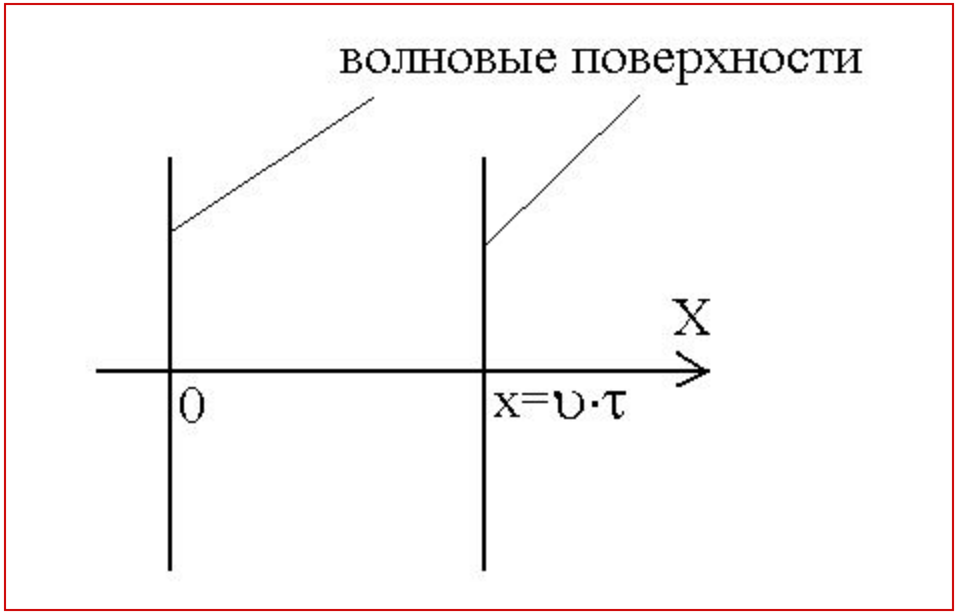
$$\lambda = \upsilon \cdot T \qquad \text{С учетом} \quad T = \frac{1}{\nu}: \quad \lambda = \frac{\upsilon}{\nu}$$

<u>Фронт волны</u>:
геометрическое место точек, до которых дошли колебания в данный момент времени.

<u>Волновая поверхность</u>:
геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. (волны: плоские, сферические и др.)

$\xi = \xi(x, y, z, t)$ - уравнение волны

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в направлении оси X:



$$\xi(x=0,t)=A\cdot\cos(\omega t+\alpha)$$

$$\tau=\frac{x}{\upsilon}$$

$$\xi(x,t)=A\cdot\cos[\omega(t-\tau)+\alpha] \qquad \xi(x,t)=A\cdot\cos[\omega(t-\frac{x}{\upsilon})+\alpha]$$

υ - фазовая скорость, т.е. скорость с которой перемещается данное значение фазы.

При фиксированной фазе: $\upsilon=\dfrac{dx}{dt}$

$$\xi(x,t) = A \cdot \cos[\omega t - \omega \frac{x}{\upsilon} + \alpha]$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ - волновое число

$$k = \frac{2\pi\nu}{\lambda\nu} = \frac{2\pi\nu}{\upsilon} = \frac{\omega}{\upsilon}$$

$$\xi = A \cdot \cos[\omega t - kx + \alpha]$$ - незатухающая волна

$$\xi = A_0 \cdot e^{-\beta x} \cdot \cos[\omega t - kx + \alpha]$$ - затухающая волна (в поглощающей среде)

Рассмотрим сферическую волну

Фаза волны для точек, лежащих на волновой поверхности радиуса r:

$$\varphi = [\omega(t - \frac{r}{\upsilon}) + \alpha] = \omega t - kr + \alpha$$

Уравнение сферической волны в непоглощающей среде:

$$\xi = \frac{A}{r} \cdot \cos(\omega t - kr + \alpha)$$

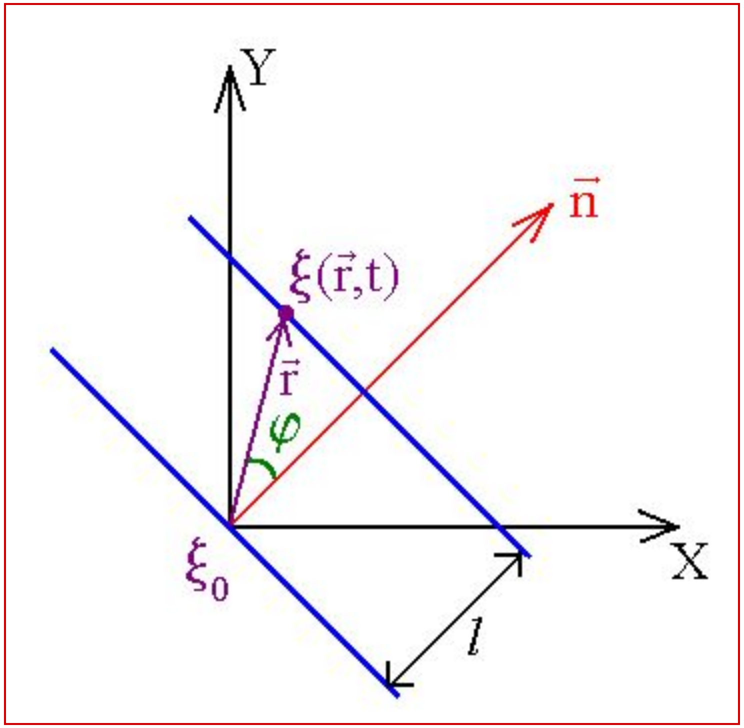
Уравнение сферической волны в поглощающей среде:

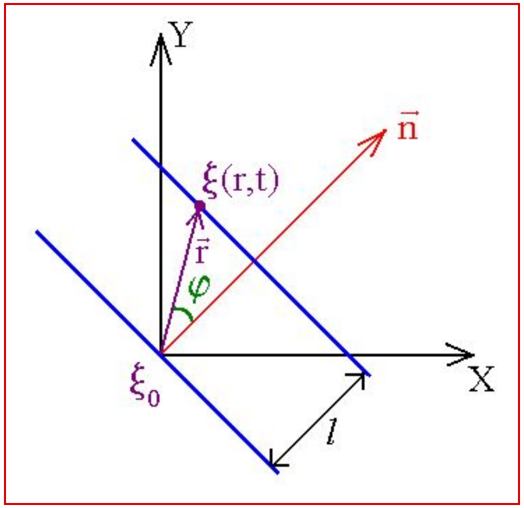
$$\xi = \frac{A}{r} \cdot e^{-\beta r} \cdot \cos(\omega t - kr + \alpha)$$

УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРА-НЯЮЩЕЙСЯ В ПРОИЗВОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Направление распространения волны образует с осями углы α, β, γ.

$$\xi_0 = A \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$





$$\xi = A\cdot\cos(\omega(t - \frac{l}{\upsilon}) + \alpha)$$

$$\xi = A\cdot\cos(\omega t - k\cdot l + \alpha)$$

Для произвольной точки волновой поверхности:

$$\vec{n}\cdot\vec{r} = 1\cdot r\cdot\cos\varphi = l$$

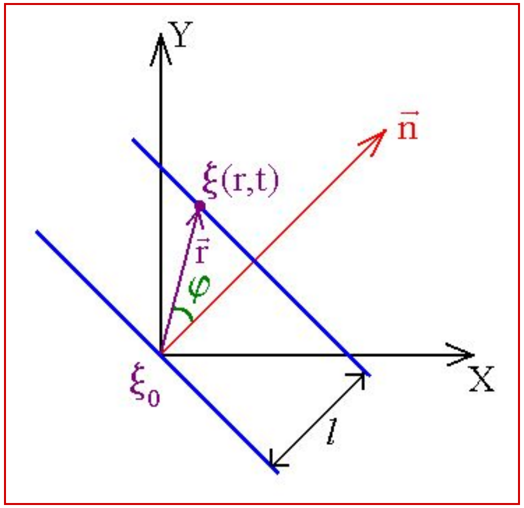
$$\xi = A\cdot\cos(\omega t - k\cdot\vec{n}\cdot\vec{r} + \alpha)$$

$\vec{k} = k\cdot\vec{n}$ - волновой вектор $\qquad |\vec{k}| = k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha)$$ - уравнение плоской незатухающей волны

$$\xi = A \cdot e^{-\beta \cdot l} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha)$$ - уравнение плоской затухающей волны

$$\xi = A \cdot e^{-\beta \cdot \vec{n} \cdot \vec{r}} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha)$$



Перепишем через координаты уравнение:

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{\boldsymbol{k}} \cdot (x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}) =$$

$$= \vec{\boldsymbol{k}} \cdot x \cdot \vec{i} + \vec{\boldsymbol{k}} \cdot y \cdot \vec{j} + \vec{\boldsymbol{k}} \cdot z \cdot \vec{k} =$$

$$= \boldsymbol{k} \cdot x \cdot 1 \cdot \cos\alpha + \boldsymbol{k} \cdot y \cdot 1 \cdot \cos\beta + \boldsymbol{k} \cdot z \cdot 1 \cdot \cos\gamma =$$

$$= \boldsymbol{k}_x \cdot x + \boldsymbol{k}_y \cdot y + \boldsymbol{k}_z \cdot z$$

$$\xi(x, y, z, t) = A \cdot \cos(\omega t - k_x \cdot x - k_y \cdot y - k_z \cdot z + \alpha)$$

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha \qquad k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta \qquad k_z = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma$$

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение волны является решением волнового уравнения. Получим волновое уравнение.

$$\xi(\vec{r},t) = A\cdot\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha)$$

$$\xi(x,y,z,t) = A\cdot\cos(\omega t - k_x\cdot x - k_y\cdot y - k_z\cdot z + \alpha)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}(-A\cdot\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha)\cdot\omega) =$$

$$= -\omega^2 A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha) = -\omega^2\xi$$

$$\boxed{\xi(\vec{r},t) = A\cdot\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha)}$$

$$\boxed{\xi(x,y,z,t) = A\cdot\cos(\omega t - k_x\cdot x - k_y\cdot y - k_z\cdot z + \alpha)}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(A\cdot\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha)\cdot k_x) =$$

$$= -k_x^2 A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha) = -k_x{}^2\xi$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(A\cdot\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha)\cdot k_y) =$$

$$= -k_y^2 A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha) = -k_y{}^2\xi$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}(A\cdot\sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha)\cdot k_z) =$$

$$= -k_z^2 A\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \alpha) = -k_z{}^2\xi$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=-(k_x^2+k_y^2+k_z^2)\xi=-k^2\xi$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-\omega^2\xi$$

$$\xi=-\frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{k^2}{\omega^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

$$(k=\frac{\omega}{\upsilon};\quad \frac{k^2}{\omega^2}=\frac{1}{\upsilon^2})$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta\xi=\frac{1}{\upsilon^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}}$$

$$\Delta\xi=\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}$$

Для плоской волны, распространяющейся в направлении x:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$ - фазовая скорость продольной волны

E - модуль Юнга

$$\upsilon = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$ - фазовая скорость поперечной волны

G - модуль сдвига

ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим плоскую продольную волну, распространяющуюся в направлении x:

$$\xi = A \cdot \cos[\omega t - kx + \alpha)]$$

Среда, в которой распространяется волна, обладает дополнительным запасом энергии. Волна переносит энергию от источника колебаний в различные точки среды.

Плотность энергии: $w = \frac{\Delta W}{\Delta V}$

$$w = \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx + \alpha)$$

Среднее по времени значение:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2$$

Поток энергии через заданную поверхность (скалярная величина):

$$\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \left(\Phi = \frac{dW}{dt} \right) \qquad [\Phi] = \textit{Вт}$$

Плотность потока энергии (векторная величина):

$$j = \frac{\Delta W}{\Delta S_{\perp} \cdot \Delta t} \qquad [j] = \textit{Вт} / \textit{м}^2$$

$$\Phi = \int j \cdot dS_{\perp} \qquad j = w \cdot \upsilon$$

Определим вектор $\vec{v}$, модуль которого равен фазовой скорости волны, а направление совпадает с направлением переноса энергии (вектор скорости переноса энергии).

$$\vec{j} = w \cdot \vec{v}$$

Для синусоидальных волн эта скорость равна фазовой:

$$j = w \cdot \upsilon$$

$\vec{j}$ - вектор Умова.

Среднее по времени значение вектора Умова:

$$\langle \vec{j} \rangle = \langle w \rangle \cdot \vec{\upsilon}$$

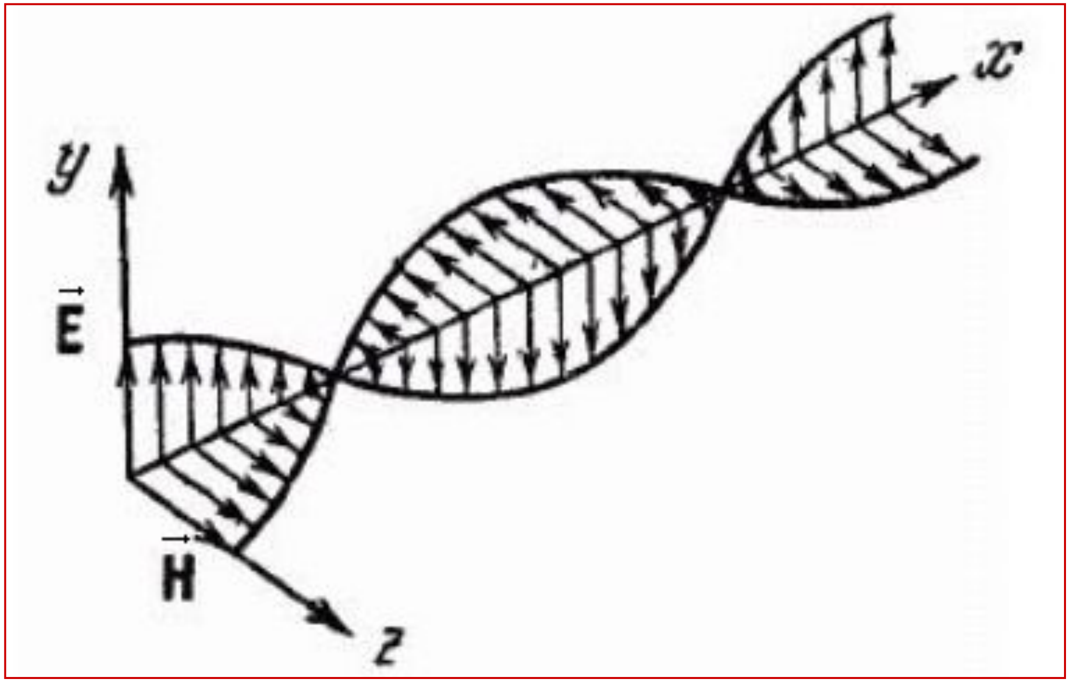
$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \vec{\upsilon}$$

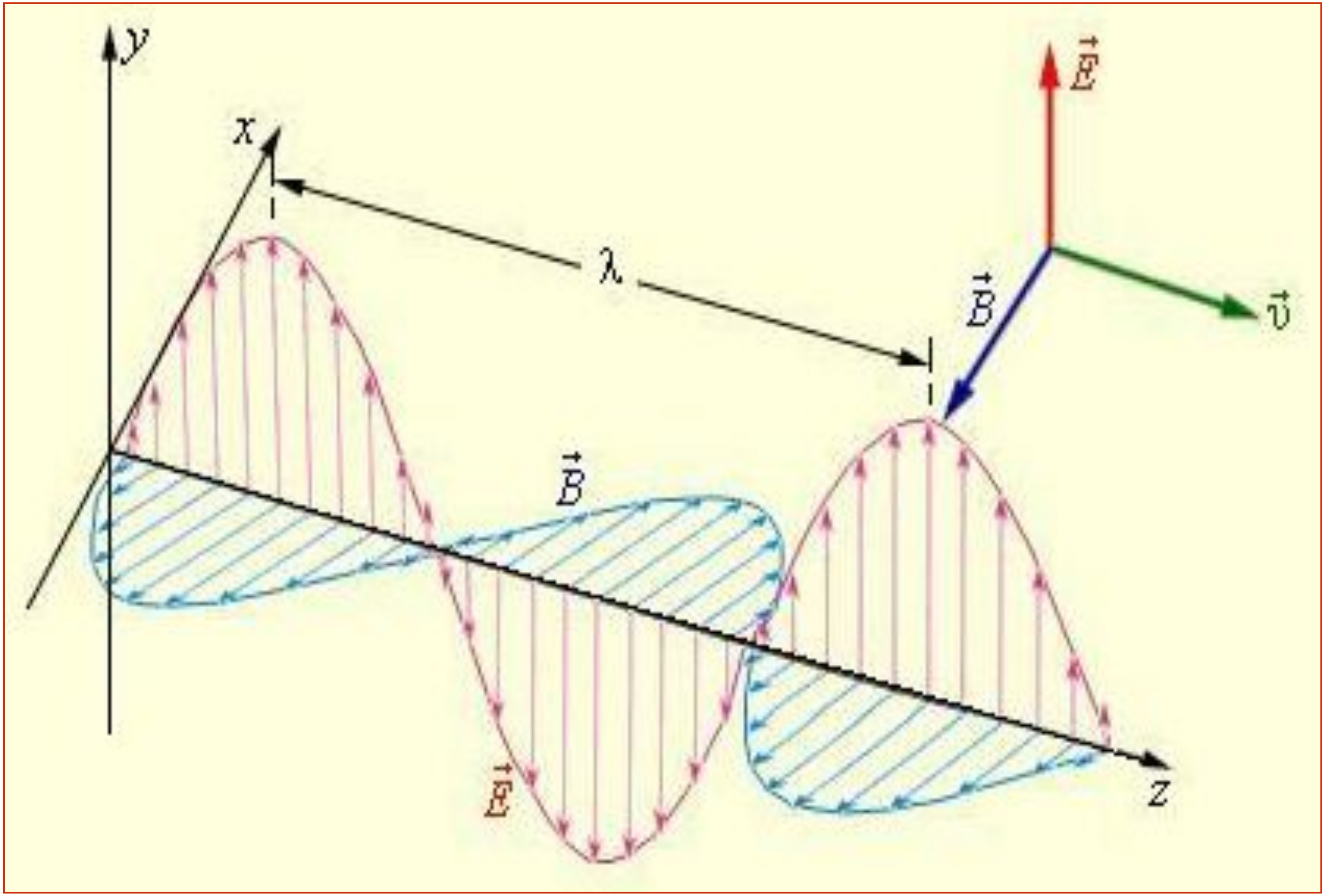
$I = \langle j \rangle = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \upsilon$ - интенсивность волны

$$\mathrm{I} \sim \mathrm{A}^2$$

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Из теории Максвелла вытекает, что существуют электромагнитные волны, то есть распространяющееся в пространстве и во времени электромагнитное поле. Электромагнитные волны поперечны – вектор напряженности электрического поля и вектор магнитной индукции (напряженности магнитного поля) перпендикулярны друг другу и лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны





y
x
λ
$\vec{E}$
$\vec{B}$
$\vec{v}$
$\vec{B}$
$\vec{E}$
z

Волновое уравнение для электромагнитной волны:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \dfrac{\varepsilon\mu}{c^2} \cdot \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \end{cases}$$

Т 29.8

СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Электромагнитные волны распространяются в веществе с конечной скоростью.

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}.$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2{,}99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

$$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad n = \sqrt{\varepsilon\mu} \qquad \upsilon = \frac{c}{n}$$

Отражение электромагнитных волн

Закон отражения электромагнитных волн.

Угол падения равен углу преломления и лежат в одной плоскости

$$\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2$$

Закон преломления электромагнитных волн.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

Преломление электромагнитных волн

Уравнения плоской электромагнитной волны, распространяющейся в направлении X:

$$\begin{cases} E_y = E_m \cdot \cos(\omega t - kx) \\ H_z = H_m \cdot \cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

Умножим E_y на $\vec{j}$, а H_z на $\vec{k}$.

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_m \cdot \cos(\omega t - kx) \\ \vec{H} = \vec{H}_m \cdot \cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

В электромагнитной волне происходят взаимные превращения электрического и магнитного полей. Электромагнитные волны переносят энергию. При распространении волн возникает поток электромагнитной энергии.

Рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся в вакууме:

$$w = w_э + w_м = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2}$$ - плотность энергии (для вакуума)

В каждый момент времени $w_э = w_м$ (для вакуума и непроводящей среды).

Вектор плотности потока энергии - вектор Пойнтинга:

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]$$

$$S = E \cdot H = w \cdot c$$ - для вакуума

Из теории Максвелла следовало, что электромагнитные волны должны оказывать давление на поглощающее или отражающее тело. Давление электромагнитного излучения объясняется тем, что под действием электрического поля волны в веществе возникают слабые токи, то есть упорядоченное движение заряженных частиц. На эти токи действует сила Ампера со стороны магнитного поля волны, направленная в толщу вещества. Эта сила и создает результирующее давление.

Первые эксперименты по определению давления излучения на отражающие и поглощающие тела были выполнены П. Н. Лебедевым (1900 г.).

Электромагнитные волны могут возбуждаться только ускоренно движущимися зарядами. Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является небольшой по размерам электрический диполь, дипольный момент которого изменяется во времени. Такой диполь называют диполем Герца.