Основы функционального анализа

Глава 2. Линейные нормированные пространства

Основной источник :

В.В. Смагин. Линейные нормированные пространства. Учебное пособие

9. ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

Пусть H — вещественное (комплексное) линейное пространство. Говорят, что в H задано скалярное произведение, если для любых двух элементов x, y из H определено вещественное (комплексное) число (x, y), удовлетворяющее для $x, y, z \in H$ и чисел λ следующим аксиомам:

1. $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0 \longleftrightarrow x = \Theta$;
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где черта сверху означает комплексное сопряжение;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Число (x, y) в этом случае называется *скалярным произведением* элементов x и y, а само пространство H называется *пространством со скалярным произведением* (обозначение – ПСП).

Укажем некоторые простейшие свойства, следующие из аксиом скалярного произведения. Для $x, y, z \in H$ и чисел λ выполняется:

а) $(\Theta, x) = 0$; б) $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$; в) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$.

Лемма 5. *В H – ПСП выполняется неравенство Коши-Буняковского*

$$(\forall x, y \in H)\ [\,|(x,y)|^2 \leq (x,x)\,(y,y)\,].$$

Доказательство. Считаем,что $(x,y) \neq 0$, иначе неравенство очевидно. Далее для любого $\lambda \in \mathbb{R}^1$ и произвольного числа μ получим:

$$0 \leq (\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) = \lambda^2(x,x) + \lambda\,\overline{\mu}\,(x,y) + \lambda\,\mu\,(y,x) + \mu\,\overline{\mu}\,(y,y) =$$
$$\lambda^2(x,x) + \lambda\,[\,\overline{\mu}\,(x,y) + \mu\,(y,x)\,] + |\mu|^2(y,y).$$

Положим $\mu = (x,y)/|(x,y)|$. Тогда

$$0 \leq \lambda^2(x,x) + 2\lambda\,|\,(x,y)\,| + (y,y).$$

Следовательно, дискриминант полученного трехчлена

$$D = 4\,|(x,y)|^2 - 4\,(x,x)\,(y,y) \leq 0 \qquad \heartsuit.$$

Определим в H – ПСП норму $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Первые две аксиомы нормы выполняются очевидным образом. Третья аксиома нормы следует из неравенства Коши-Буняковского. Действительно,

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, x) + (x, y) + (y, y) =$$
$$\|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x, y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\,|\,(x, y)\,| + \|y\|^2 \leq$$
$$\|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\,\|x\| + \|y\|\,)^2.$$

Теперь неравенство Коши-Буняковского можно записать следующим образом :

$$(\forall x, y \in H)[\,|\,(x, y)\,| \leq \|\,x\,\|\,\|\,y\,\|\,]$$

Теорема 8. *В H – ПСП скалярное произведение есть непрерывная функция своих аргументов относительно сходимости по норме.*

Доказательство. Пусть $x_n, y_n, x, y \in H$ $(n \in \mathbb{N})$ такие, что $\|x_n - x\| \to 0$ и $\|y_n - y\| \to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим

$$|\,(x_n, y_n) - (x, y)\,| = |\,(x_n - x, y_n) + (x, y_n - y)\,| \leq |\,(x_n - x, y_n)\,| + |\,(x, y_n - y)\,| \leq$$
$$\|x_n - x\|\,\|y_n\| + \|x\|\,\|y_n - y\| \to 0\,\|y\| + \|x\|\,0 = 0. \qquad \heartsuit$$

Если H – ПСП является полным по норме, порожденной скалярным произведением, то пространство H называется *гильбертовым* (обозначение – ГП).

Если H – ПСП является неполным, то, пополняя его как нормированное пространство по норме, порожденной скалярным произведением пространства H, получим банахово пространство $\widehat{H}$. При этом скалярное произведение в H продолжается на $\widehat{H}$ по непрерывности. Итак, пополнение неполного H – ПСП существует и является гильбертовым пространством [4, с.71].

Примеры пространств со скалярным произведением.

1. $\mathbb{R}_2^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R}^1\}$, где скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

2. $\mathbb{C}_2^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{C}^1\}$, где скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$.

3. l_2 – пространство числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, ..., x_k, ...)$, суммируемых со второй степенью. Если пространство l_2 вещественное, то есть координаты $x_i \in \mathbb{R}^1$, то скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$. Если же пространство l_2 комплексное, то есть координаты $x_i \in \mathbb{C}^1$, то скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$.

4. $C_2[a, b]$ – непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, где скалярное произведение задается формулой $(x, y) = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt$.

Аксиомы скалярного произведения в указанных примерах рекомендуется проверить самостоятельно.

Обратим внимание, что в примерах 1 – 3 соответствующие пространства являются полными по нормам, которые порождаются скалярными произведениями, то есть это гильбертовы пространства. В 4-ом примере соответствующее пространство не является полным.

10. СВОЙСТВО ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

Пусть H – ПСП. Элементы $x, y \in H$ называются *ортогональными*, что обозначается $x \perp y$, если их скалярное произведение $(x, y) = 0$.

Пусть в H задано множество $M \subset H$. Элемент $x \in H$ называется *ортогональным множеству* M, что обозначается $x \perp M$, если $(\forall y \in M)\,[\,x \perp y\,]$.

Для множества $M \subset H$ определим множество $M^{\perp} = \{x \in H \,|\, x \perp M\}$, которое называется *ортогональным дополнением* множества M.

Теорема 9. *Пусть H – ГП и L – подпространство H. Тогда всякий $x \in H$ однозначно представим в виде $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \perp L$.*

Заметим, что $L^{\perp}$ – подпространство H (задача 8.11). Таким образом, в теореме 9 установлено, что $H = L \bigoplus L^{\perp}$. Такую прямую сумму подпространств называют также *ортогональной* суммой.

В разложении $x = y + z$ элемент $y \in L$ называют *проекцией* x на подпространство L. Соответственно, элемент $z \in L^{\perp}$ – проекцией x на $L^{\perp}$.

Пример

В ГП $H = l_2$ рассмотрим элементы вида $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (у которых на $k-$м месте стоит 1, а остальные координаты – нули). Эти элементы попарно ортогональны. Например, $e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$ ортогонален $e_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$.

Теорема 10. *Пусть H – ПСП и $M \subset H$. Для того чтобы множество M было всюду плотно в H, то есть $\overline{M} = H$, необходимо, а если H – ГП и множество M – ЛМ в H, и достаточно, чтобы $M^{\perp} = \{\Theta\}$.*

Доказательство. Пусть $\overline{M} = H$ и $x \in M^{\perp}$. Существует последовательность $\{x_n\} \subset M$ такая, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Переходя к пределу в скалярном произведении, получим $0 = (x, x_n) \to (x, x) = 0$. Следовательно, $x = \Theta$, то есть $M^{\perp} = \{\Theta\}$.

Пусть теперь M – ЛМ в H – ГП и $M^{\perp} = \{\Theta\}$. Заметим, что $\overline{M}$ – подпространство H (задача 7.5.). Предположим, что $\overline{M} \neq H$. Возьмем элемент $x \notin \overline{M}$ и по теореме 9 представим его в виде $x = y + z$, где $y \in \overline{M}$ и $z \perp \overline{M}$. Заметим, что $z \neq \Theta$, иначе, $x = y \in \overline{M}$. Кроме того, $z \perp M$, так как $M \subset \overline{M}$. Таким образом, $M^{\perp} \ni z \neq \Theta$. Получили противоречие с условием теоремы. Следовательно, $\overline{M} = H$. ♡