Функционально-графический метод решения уравнений

ПОДГОТОВИЛА:
ГРЕБЕНИКОВА СОФЬЯ ВИКТОРОВНА
10 КЛАСС
РУКОВОДИТЕЛЬ:
ТОВМЕНКО СВЕТЛАНА ПЕТРОВНА
УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ

СОДЕРЖАНИЕ

Суть функционального метода

В ряде случаев точное решение уравнений f (x) = g (x) по изученным правилам затруднительно
или даже невозможно.
Однако бывает достаточно обратить внимание на свойства функций f и g, как сразу решается вопрос о наличии решений уравнения или выявляется наиболее рациональный приём
его решения. Основу для таких утверждений даёт нам одно из определений уравнения,
как равенства двух функций. Значит , суть функционального метода: использование свойств
Функций или построение графиков для решения уравнений. Выделим следующие компоненты метода:

1) Отыскание области определения функций
2) Отыскание области значения функции
3) Исследование функций на монотонность
4) Исследование функций на чётность
5) Соотнесение свойств функций, входящих в уравнение, с условием
6) Построение графиков функций, входящих в уравнение
7) Отыскание корней уравнения методом подбора

Учитывая компоненты метода, выделим способы реализации:

1) Доказательство отсутствия решения уравнения на основе использования области определения, области значения, свойств монотонности и т.д.
2) Отыскание одного или нескольких корней уравнения с последующим доказательством
3) Выяснение того, что область определения содержит один элемент и проверка этого значения на основании определения корня уравнения
4) Преобразование функций, входящих в уравнение к виду, удобному для установления монотонности одной из частей уравнения (или обеих) либо оценки её множества значений
5) Графическое решение уравнений

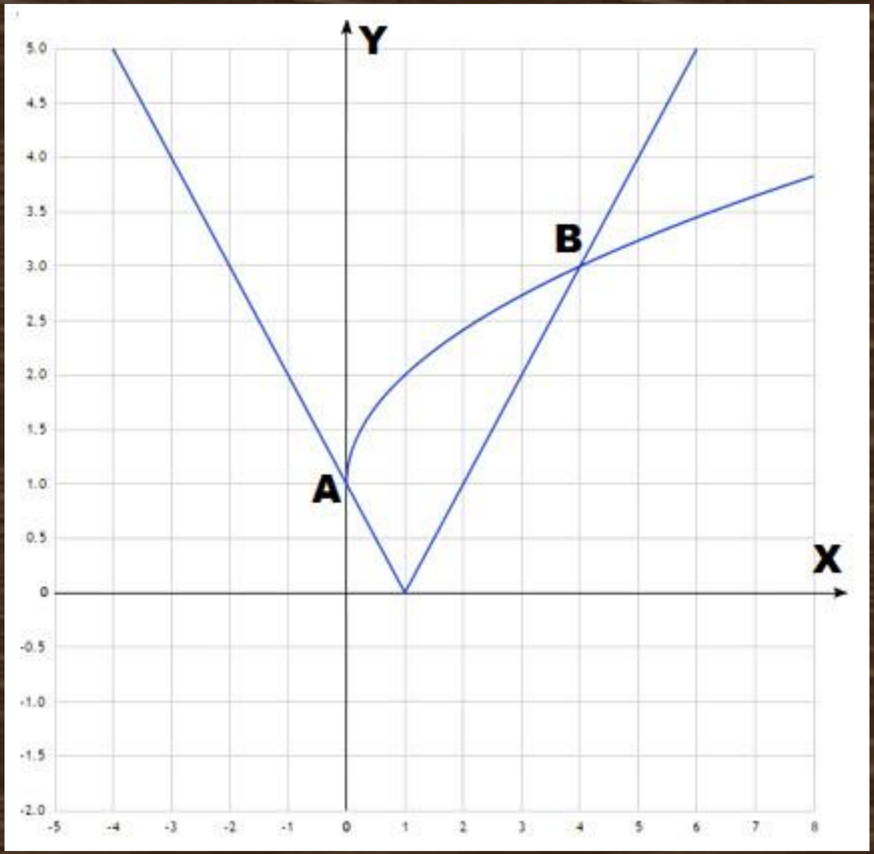
ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ

Графический метод решения уравнений

На практике довольно часто оказывается полезным графический метод решения уравнений. Он заключается В следующем: пусть нам дано уравнение вида f(x)=g(x). Мы строим два графика y=f(x) и y=g(x) на одной координатной плоскости и отмечаем точки, в которых наши графики пересекаются. Абцисса точки пересечения (координата по X) – это и есть решение нашего уравнения.

Пример.
Решить уравнение: $\sqrt{x+1}=|x-1|$

Решение.
Построим графики функций, на одной координатной плоскости: $y=\sqrt{x+1}$ и $y=|x-1|$



Как видно из рисунка наши графики пересекаются в двух точках с координатами: A(0;1) и B(4;3). Решением исходного уравнения будут абсциссы этих точек.

Ответ: x=0 и x=4.

Функциональный метод

Пример

Решим уравнение $x5 + 5x - 42 = 0$

По виду это уравнение относится к числу тех, которые решаются методом разложения на множители. Этот метод требует значительных усилий. Представив это уравнение в виде: $x5 = 42 - 5x$ и заметив, что функция $y=x5$ возрастает, а функция $y=42-5x$ убывает, можно сделать вывод, что уравнение имеет не больше одного корня. Подбором выясняем, что этот корень $x=2$

Применение области определения функции

Пример

$$\sqrt{1-x}=\sqrt{x-2}$$

$$D(f):\begin{cases}1-x\ge 0\\ x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1\\ x\ge 2\end{cases}\Rightarrow$$

Решений нет

Ответ $\varnothing$

Пример

$$\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{2}$$

$$D(f):\begin{cases} x(x-3)\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 0, x\geq 3 \\ x\leq 2 \end{cases} \Rightarrow x=0$$

Проверим, является ли $x=0$ корнем уравнения:

$$\sqrt{0}+\sqrt{2}+\sqrt{0}=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

ответ:x=0

Использование области значений функции

Пример

$$\sin 4x + 2\cos 6x = 3$$

$$|\sin 4x| \le 1, |\cos 6x| \le 1, |\sin 4x + 2\cos 6x| \le 3 \Rightarrow \begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \cos 6x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

нет решений

Ответ: $\varnothing$

Решение уравнений и неравенств с использованием области определения, области значения и монотонности функции

Пример

$$\sqrt{5+x^2}+\sqrt{5-x^2}=4$$

$$D(f):\begin{cases}5+x^2\geq 0\\5-x^2\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$$

Подбором находим

$$\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$$

Решение уравнений и неравенств с использованием свойства монотонности функции

Пример 1. $$3^x + 4^x = 5^x$$

$$3^x + 4^x = 5^x; \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$$

$f(x) = t,$ где $0 < t < 1$ убывающая $\Rightarrow f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$$

по утверждению имеет хотя бы одно решение. Подбором выясняем

$$x = 2.$$

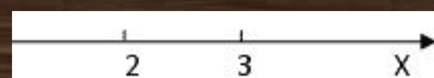
Решение задач из КИМ ЕГЭ по теме «Функционально-графический метод решения уравнений»

Найти все значения р , при которых уравнение /х-2/ + /х-3/ = р имеет хотя бы один корень

Решение:

Построим два графика функций: у=/х-2/ + /х-3/ и у=р

Для построения графика функции у=/х-2/ + /х-3/ найдем нули выражений х-2=0 и х-3=0; х1=2,х2=3.



Рассмотрим, как поведёт себя функция на промежутках:

1.(- ∞; 2)

2.[2;3

3.(3; +∞)

На промежутке $(-\infty;\ 2)$, функция принимает вид

$y = -2x + 5$;

на промежутке $[2;3]$: $y = 1$;

на промежутке $(3;\ +\infty)$: $y = 2x - 5$.

Ответ: при $p \geq 1$.

Заключение

Выполнив работу, изучив теоретическую часть и изучив примеры решения уравнений, я пришла к выводу, что функциональный метод решения уравнений имеет несколько преимуществ, против других способов решения: упрощённое и ускоренное решения уравнений

В современной жизни решение уравнений именно функционально-графическим методом является неотъемлемой частью выпускных и вступительных экзаменов в различные учебные заведения, поэтому очень важно понять и разобраться с этой темой ещё в школе.

Для того, чтобы научиться решать уравнения функционально-графическим методом, необходимо постоянно тренироваться в их решении. В этом нелегком деле вам могут помочь различные методические пособия, задачники по элементарной математике, сборники конкурсных задач, занятия по математике в школе.