

**Цель лекции:** дать основные понятия и определения алгоритмов решения задач вычислительной математики.

**Работа с матрицами – сердце научных расчетов!**

## Алгоритмы умножения матриц

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

MATRIX\_MULTIPLY( $A, B$ )

```
1   $n \leftarrow \text{rows}[A]$ 
2  Пусть  $C$  – матрица  $n \times n$ 
3  for  $i \leftarrow 1$  to  $n$ 
4      do for  $j \leftarrow 1$  to  $n$ 
5          do  $c_{ij} \leftarrow 0$ 
6              for  $k \leftarrow 1$  to  $n$ 
7                  do  $c_{ij} \leftarrow c_{ij} + a_{ik} \cdot b_{kj}$ 
8  return  $C$ 
```

## Алгоритмы умножения матриц

### Алгоритм Штрассена

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} r &= ae + bg, \\ s &= af + bh, \\ t &= ce + dg, \\ u &= cf + dh. \end{aligned}$$

## Алгоритмы решения СЛАУ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

## Итерационные

$$X_{K+1} = H X_K + C$$

Метод простой итерации

Метод Зейделя

## Алгоритмы решения СЛАУ

### Прямые

Метод Гаусса

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента

Метод LU-разложения

Предложен Тадеушем Банаховичем в 1938

## Алгоритмы решения СЛАУ

## Метод LU-разложения

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \boxtimes & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \boxtimes & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \boxtimes & 0 \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \boxtimes & l_{nn} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \boxtimes & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \boxtimes & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \boxtimes & u_{3n} \\ \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ 0 & 0 & 0 & \boxtimes & 1 \end{pmatrix}$$

## Алгоритмы решения СЛАУ

## Метод LU-разложения

```
LU_DECOMPOSITION(A)
1  n ← rows[A]
2  for k ← 1 to n
3      do  $u_{kk} \leftarrow a_{kk}$ 
4          for i ← k + 1 to n
5              do  $l_{ik} \leftarrow a_{ik}/u_{kk}$     ▷  $l_{ik}$  содержит  $v_i$ 
6                   $u_{ki} \leftarrow a_{ki}$     ▷  $u_{ki}$  содержит  $w_i^T$ 
7              for i ← k + 1 to n
8                  do for j ← k + 1 to n
9                      do  $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - l_{ik}u_{kj}$ 
10 return L и U
```

## Алгоритмы решения СЛАУ

### Метод LU-разложения. Пример

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{pmatrix}$$

а)

$$\begin{array}{c|ccc} \mathbf{2} & 3 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 10 & 9 & 18 \\ 2 & 4 & 9 & 21 \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 3 & 1 & 5 \\ \hline 3 & \mathbf{4} & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 17 \end{array}$$

в)

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 3 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & \mathbf{1} & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 17 \end{array}$$

г)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A                      L                      U



## Алгоритмы решения СЛАУ

### Метод LU-разложения

```
LUP_SOLVE( $L, U, \pi, b$ )  
1  $n \leftarrow \text{rows}[L]$   
2 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$   
3   do  $y_i \leftarrow b_{\pi[i]} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$   
4 for  $i \leftarrow n$  downto 1  
5   do  $x_i \leftarrow (y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j) / u_{ii}$   
6 return  $x$ 
```

## Вычисление обратной матрицы

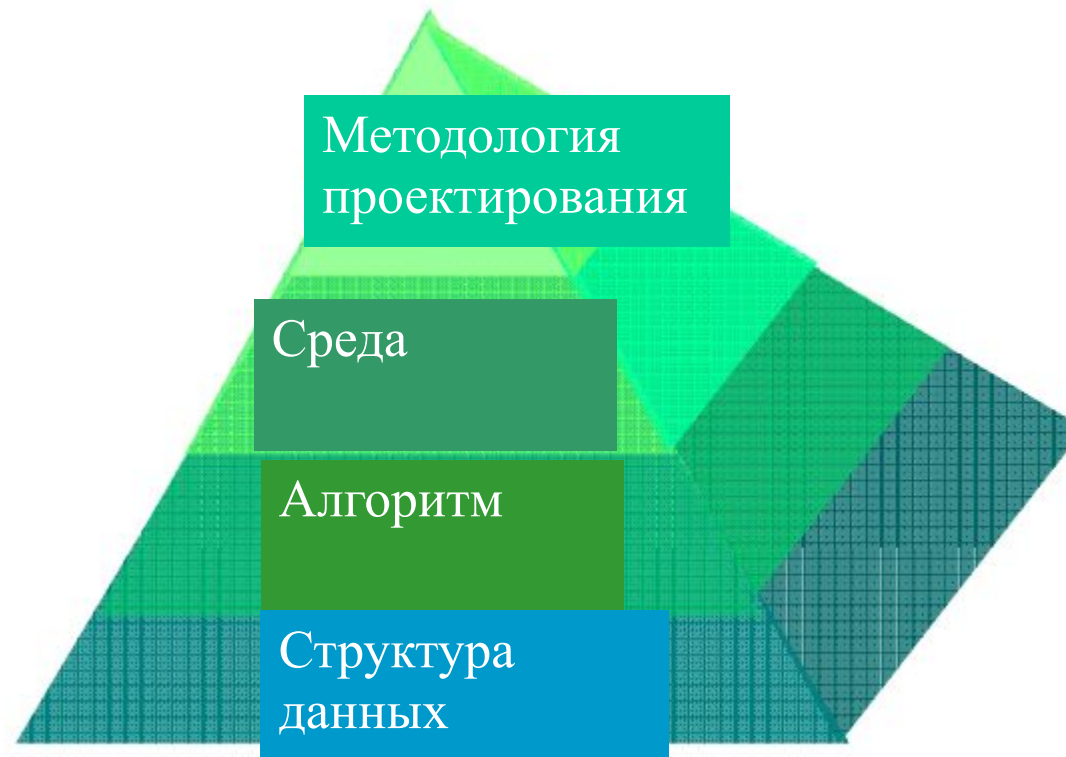
$$AX = I_n$$

$$AX_i = e_i$$

## Algowiki

<http://algowiki-project.org>

## Пирамида для решения проблемы



ДЗ  
Конспект  
Пример LU разложения

**Основные выводы:**

1. Рассмотрены основные понятия алгоритмов решения задач вычислительной математики;
2. Изучена применение алгоритмов решения задач вычислительной математики при решении задач конструкторско-технологической информатики;