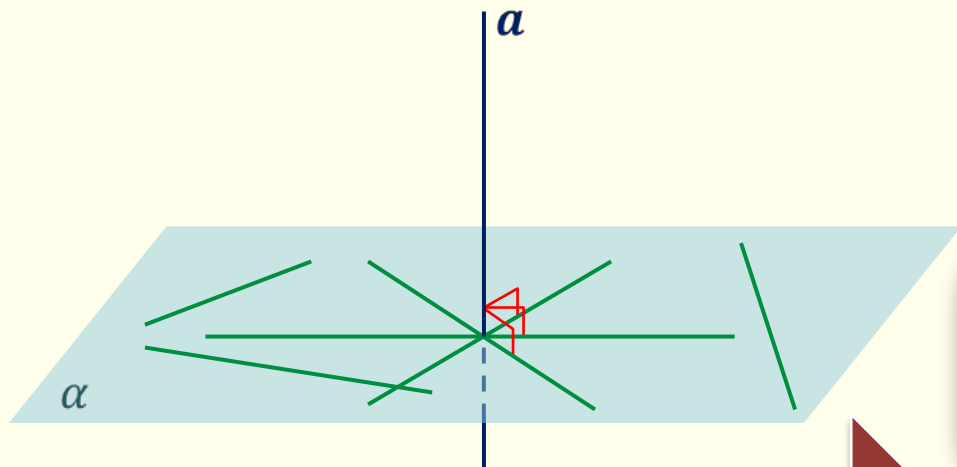


# Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости

# *Перпендикулярные прямые в пространстве*

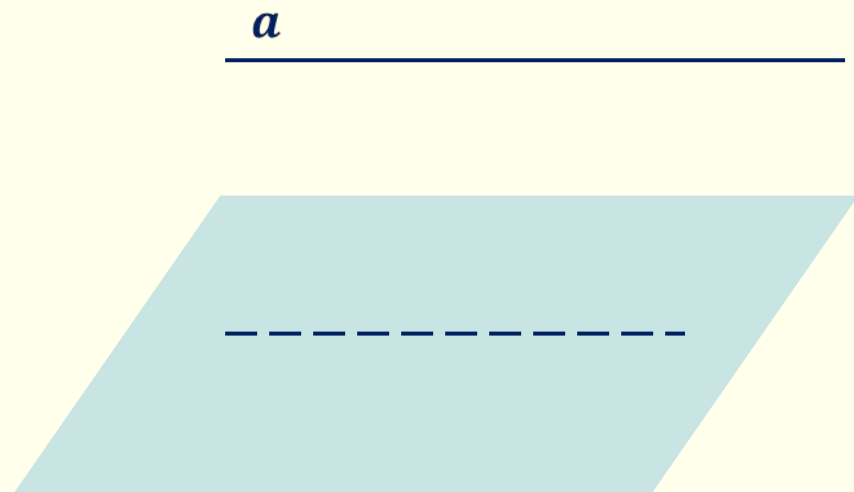
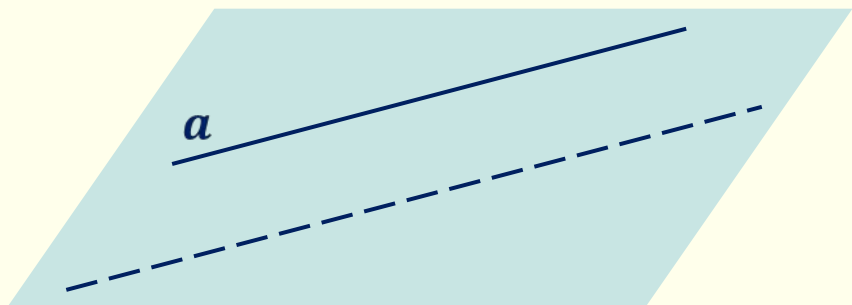
Прямая называется **перпендикулярной** к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

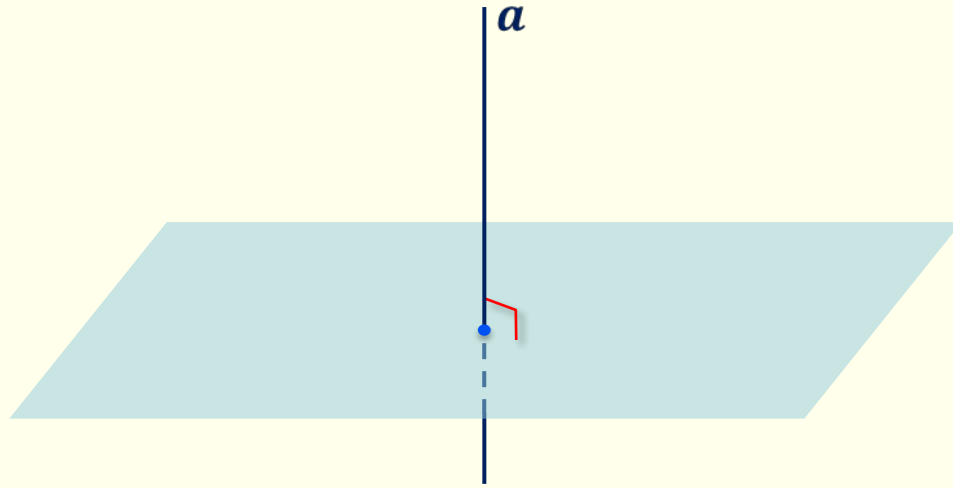


$$a \perp \alpha$$

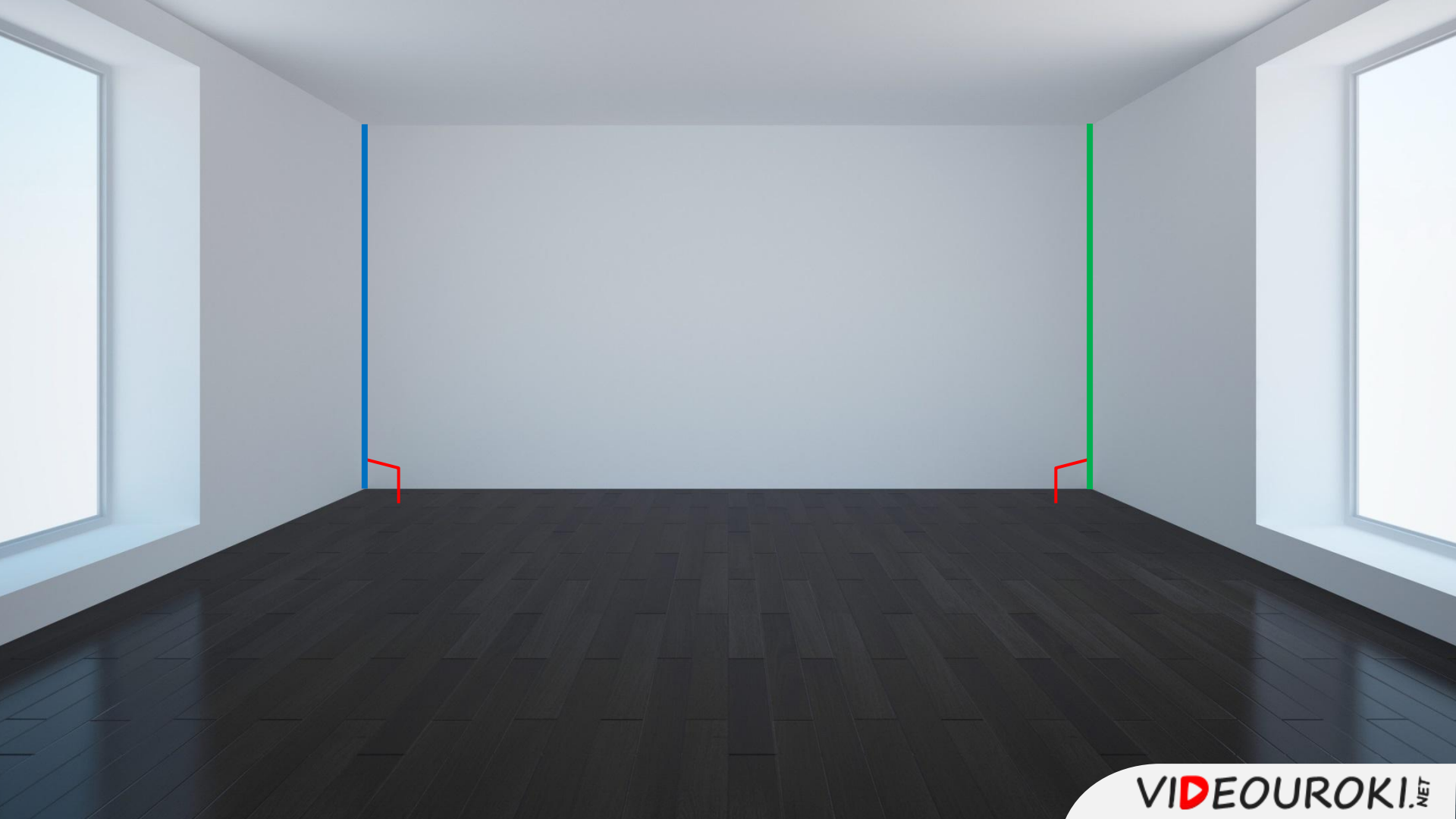
*признак перпендикулярности  
прямой к плоскости*

**Свойство.** Если прямая  $a$  перпендикулярна к плоскости  $\alpha$ , то она пересекает эту плоскость.





**Свойство.** Если прямая  $a$  перпендикулярна к плоскости  $\alpha$ , то она пересекает эту плоскость.









**Задача.** Точки  $A$ ,  $M$  и  $O$  лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости  $\alpha$ , а точки  $O$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат в плоскости  $\alpha$ . Какие из данных углов являются прямыми?

а)  $\angle AOB$

б)  $\angle MOC$

в)  $\angle DAM$

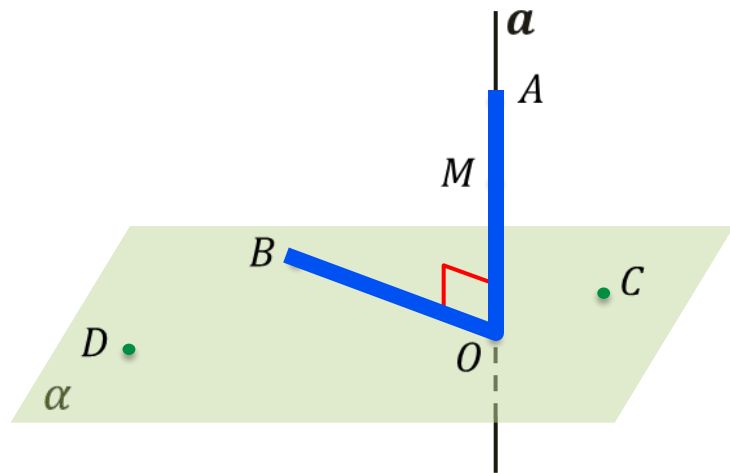
г)  $\angle DOA$

д)  $\angle BMO$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \text{а) } AO \subset a &\Rightarrow AO \perp \alpha \\ &AO \perp OB \end{aligned}$$

$$\angle AOB = 90^\circ$$



**Задача.** Точки  $A$ ,  $M$  и  $O$  лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости  $\alpha$ , а точки  $O$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат в плоскости  $\alpha$ . Какие из данных углов являются прямыми?

а)  $\angle AOB$

б)  $\angle MOC$

в)  $\angle DAM$

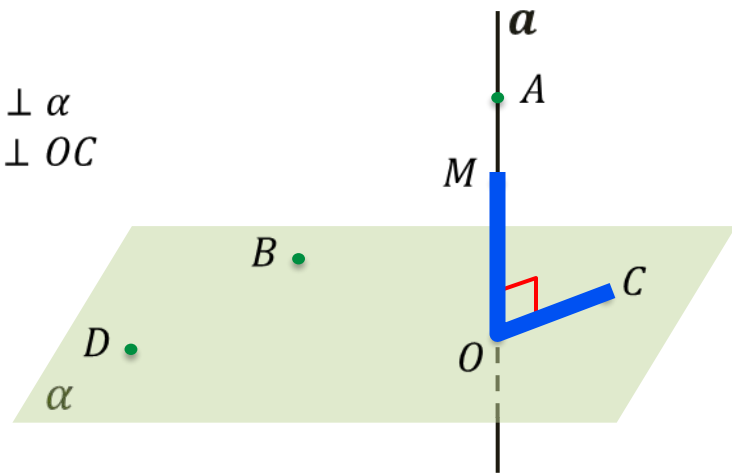
г)  $\angle DOA$

д)  $\angle BMO$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \text{а) } AO \subset a &\Rightarrow AO \perp \alpha \\ &AO \perp OB \\ \angle AOB &= 90^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } MO \subset a &\Rightarrow MO \perp \alpha \\ &MO \perp OC \\ \angle MOC &= 90^\circ \end{aligned}$$



**Задача.** Точки  $A$ ,  $M$  и  $O$  лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости  $\alpha$ , а точки  $O$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат в плоскости  $\alpha$ . Какие из данных углов являются прямыми?

а)  $\angle AOB$

б)  $\angle MOC$

в)  $\angle DAM$

г)  $\angle DOA$

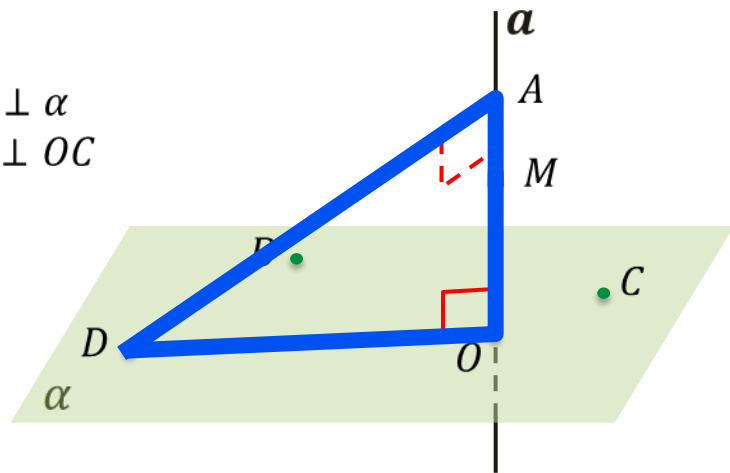
д)  $\angle BMO$

**Решение.**

а)  $AO \subset a \Rightarrow AO \perp \alpha$   
 $AO \perp BO$   
 $\angle AOB = 90^\circ$

б)  $MO \subset a \Rightarrow MO \perp \alpha$   
 $MO \perp OC$   
 $\angle MOC = 90^\circ$

в) Допустим, что  $\angle DAM = 90^\circ$ .  
 $\triangle AOD$ :  $\angle AOD = 90^\circ$  ( $AO \perp \alpha \Rightarrow AO \perp OD$ )  
В  $\triangle AOD$   $\angle DAM = \angle AOD = 90^\circ$  ?!  
Допущение не верно,  $\angle DAM \neq 90^\circ$ .



**Задача.** Точки  $A$ ,  $M$  и  $O$  лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости  $\alpha$ , а точки  $O$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат в плоскости  $\alpha$ . Какие из данных углов являются прямыми?

а)  $\angle AOB$

б)  $\angle MOC$

в)  $\angle DAM$

г)  $\angle DOA$

д)  $\angle BMO$

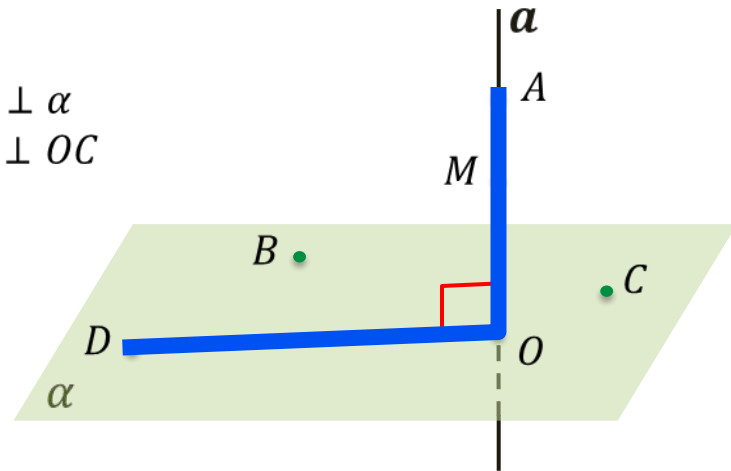
**Решение.**

а)  $AO \subset a \Rightarrow AO \perp \alpha$   
 $AO \perp OB$   
 $\angle AOB = 90^\circ$

б)  $MO \subset a \Rightarrow MO \perp \alpha$   
 $MO \perp OC$   
 $\angle MOC = 90^\circ$

в) Допустим, что  $\angle DAM = 90^\circ$ .  
 $\Delta AOD$ :  $\angle AOD = 90^\circ$  ( $AO \perp \alpha \Rightarrow AO \perp OD$ )  
В  $\Delta AOD$   $\angle DAM = \angle AOD = 90^\circ$  ?!  
Допущение не верно,  $\angle DAM \neq 90^\circ$ .

г)  $OA \subset a \Rightarrow OA \perp \alpha$   
 $OA \perp OD$   
 $\angle DOA = 90^\circ$



**Задача.** Точки  $A, M$  и  $O$  лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости  $\alpha$ , а точки  $O, B, C$  и  $D$  лежат в плоскости  $\alpha$ . Какие из данных углов являются прямыми?

- а)  $\angle AOB$       б)  $\angle MOC$       в)  $\angle DAM$       г)  $\angle DOA$       д)  $\angle BMO$

**Решение.**

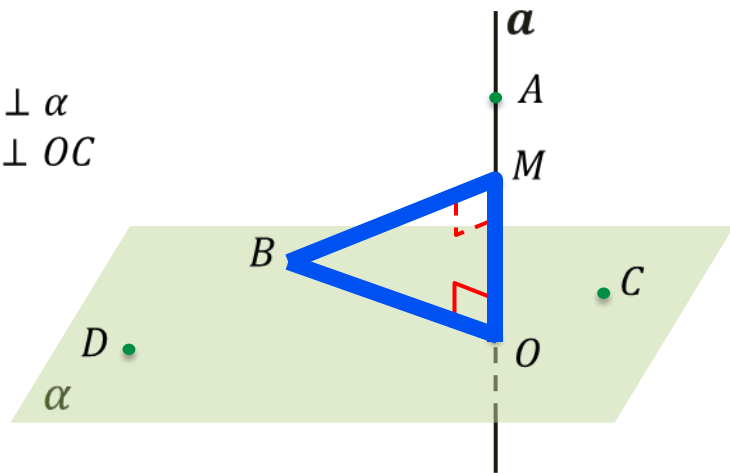
а)  $AO \subset a \Rightarrow AO \perp \alpha$   
 $AO \perp OB$   
 $\angle AOB = 90^\circ$

б)  $MO \subset a \Rightarrow MO \perp \alpha$   
 $MO \perp OC$   
 $\angle MOC = 90^\circ$

в) Допустим, что  $\angle DAM = 90^\circ$ .  
 $\triangle AOD$ :  $\angle AOD = 90^\circ$  ( $AO \perp \alpha \Rightarrow AO \perp OD$ )  
 В  $\triangle AOD$   $\angle DAM = \angle AOD = 90^\circ$  **?!**  
 Допущение не верно,  $\angle DAM \neq 90^\circ$ .

г)  $OA \subset a \Rightarrow OA \perp \alpha$   
 $OA \perp OD$   
 $\angle DOA = 90^\circ$

д) Допустим, что  $\angle BMO = 90^\circ$ .  
 $\triangle BMO$ :  $\angle BOM = 90^\circ$  ( $MO \perp \alpha \Rightarrow MO \perp OB$ )  
 В  $\triangle BMO$   $\angle BMO = \angle BOM = 90^\circ$  **?!**  
 Допущение не верно,  $\angle BMO \neq 90^\circ$ .



**Теорема.** Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.

$$a \parallel a_1, a \perp \alpha \Rightarrow a_1 \perp \alpha$$

**Доказательство.**

1.  $a \perp \alpha \Rightarrow a \perp x$

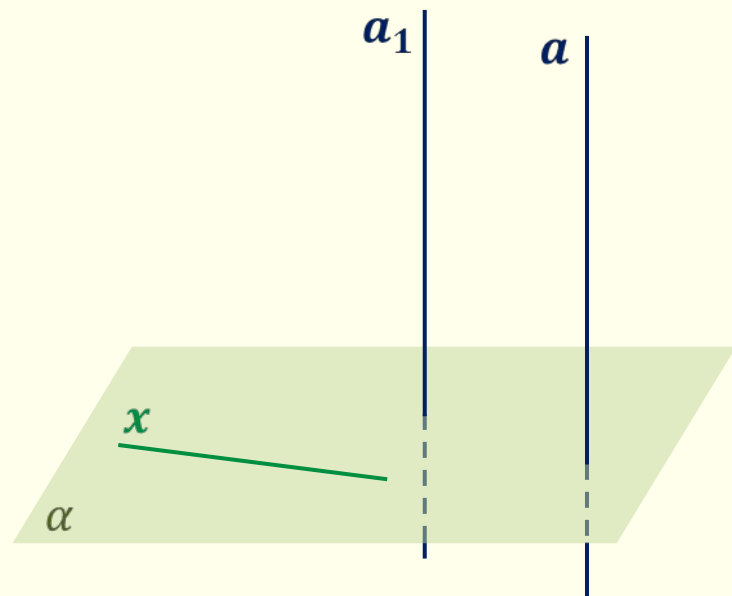
2.  $a \parallel a_1, a \perp x \Rightarrow a_1 \perp x$

Какую бы прямую на плоскости мы не взяли в качестве  $x$ , последнее утверждение будет всегда верным.

Значит,  $a_1$  перпендикулярна к любой прямой из  $\alpha$ .

$$\Rightarrow a_1 \perp \alpha$$

**Что и требовалось доказать.**



## Обратная теорема.

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

$$a \perp \alpha, b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$$

**Доказательство.**

1.  $b_1 \parallel a, a \perp \alpha \Rightarrow b_1 \perp \alpha$

2.  $\alpha \cap \beta = c$

3.  $b \perp \alpha, c \subset \alpha \Rightarrow b \perp c$

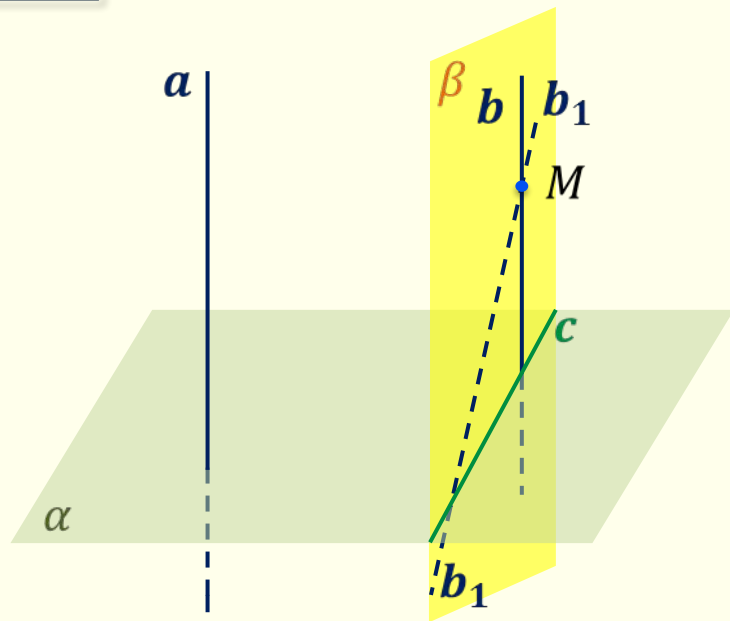
4.  $b_1 \perp \alpha, c \subset \alpha \Rightarrow b_1 \perp c$

5.  $b = b_1$

6.  $b_1 \parallel a \Rightarrow b \parallel a$

**Что и требовалось доказать.**

!?



**Задача.**  $AB \parallel \alpha$ ,  $AA_1 \perp \alpha$  и  $BB_1 \perp \alpha$ .  $AB = AA_1 = 5,4$  см.

Определить вид четырёхугольника  $ABB_1A_1$  и найти его периметр.

**Решение.**

1.  $AA_1 \perp \alpha$ ,  $BB_1 \perp \alpha \Rightarrow AA_1 \parallel BB_1$

2.  $\alpha \cap \beta = A_1B_1$

$AB \subset \beta$ ,  $AB \parallel \alpha \Rightarrow AB \parallel A_1B_1$

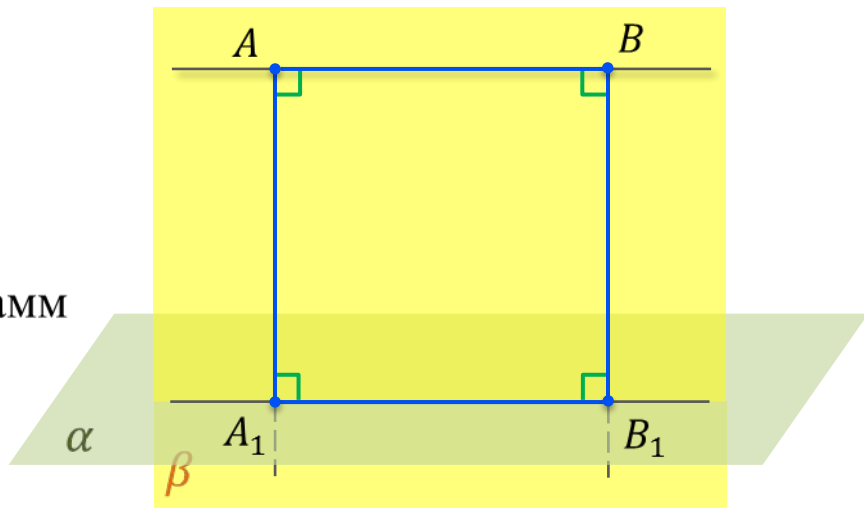
Из пунктов 1 и 2  $\Rightarrow ABB_1A_1$  – параллелограмм

4.  $AA_1 \perp \alpha \Rightarrow AA_1 \perp A_1B_1 \Rightarrow \angle A_1 = 90^\circ$   
 $\angle B = \angle A_1 = 90^\circ$

5.  $BB_1 \perp \alpha \Rightarrow BB_1 \perp A_1B_1 \Rightarrow \angle B_1 = 90^\circ$   
 $\angle A = \angle B_1 = 90^\circ$

Из пунктов 4 и 5  $\Rightarrow ABB_1A_1$  – прямоугольник

**Ответ:**  $ABB_1A_1$  – квадрат,  $P_{ABB_1A_1} = 21,6$  см.



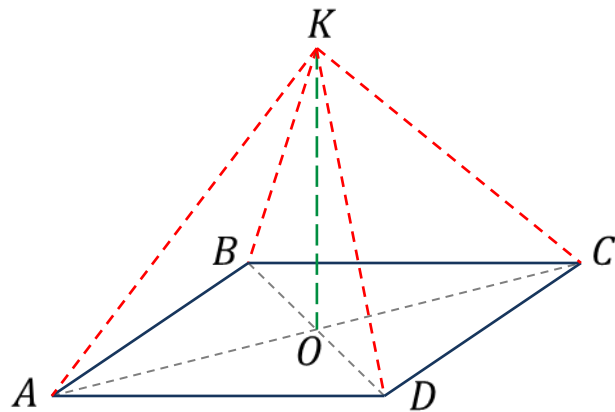
7.  $AB = AA_1 \Rightarrow ABB_1A_1$  – квадрат

8.  $P_{ABB_1A_1} = 4 \cdot 5,4 = 21,6$  (см)



**Задача.** Через точку  $O$  пересечения диагоналей квадрата, сторона которого равна  $a$ , проведена прямая  $OK$ , перпендикулярная к плоскости квадрата.

Найти расстояния от точки  $K$  до каждой из вершин квадрата, если  $OK = b$ .



**Задача.** Через точку  $O$  пересечения диагоналей квадрата, сторона которого равна  $a$ , проведена прямая  $OK$ , перпендикулярная к плоскости квадрата.

Найти расстояния от точки  $K$  до каждой из вершин квадрата, если  $OK = b$ .

**Решение.**

1.  $AC = BD \Rightarrow AO = OC = BO = OD$

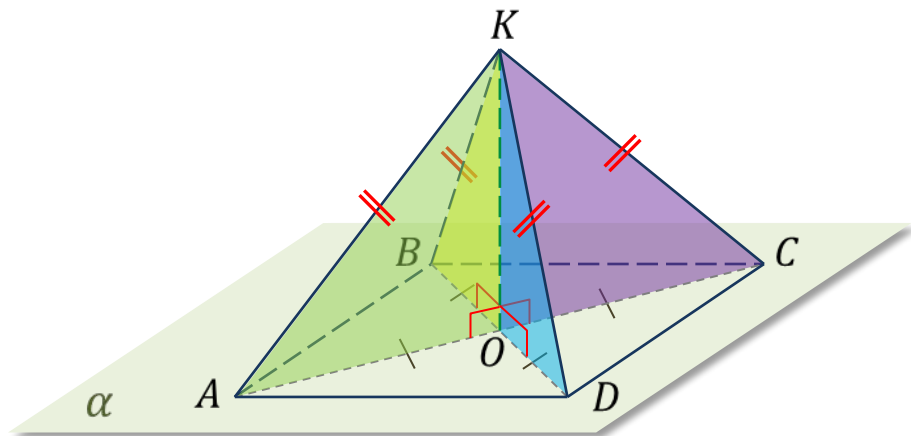
2.  $KO \perp \alpha \Rightarrow KO \perp AC, KO \perp BD$

$\angle KOA = \angle KOB = \angle KOC = \angle KOD$

3.  $\Delta KOA = \Delta KOB = \Delta KOC = \Delta KOD$

по двум катетам

4.  $KA = KB = KC = KD$



**Задача.** Через точку  $O$  пересечения диагоналей квадрата, сторона которого равна  $a$ , проведена прямая  $OK$ , перпендикулярная к плоскости квадрата.

Найти расстояния от точки  $K$  до каждой из вершин квадрата, если  $OK = b$ .

**Решение.**

1.  $AC = BD \Rightarrow AO = OC = BO = OD$

2.  $KO \perp \alpha \Rightarrow KO \perp AC, KO \perp BD$

$$\angle KOA = \angle KOB = \angle KOC = \angle KOD$$

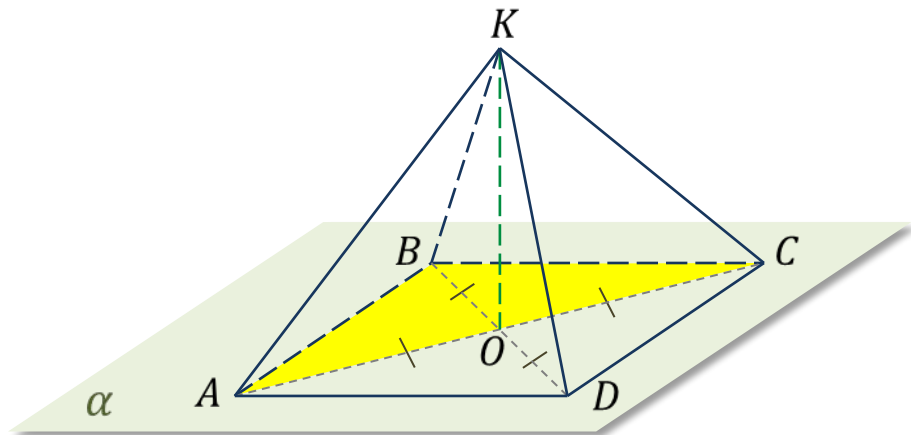
3.  $\triangle KOA = \triangle KOB = \triangle KOC = \triangle KOD$

по двум катетам

4.  $KA = KB = KC = KD$

5.  $\triangle ABC$ : по т. Пифагора  $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

6.  $AO = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$



**Задача.** Через точку  $O$  пересечения диагоналей квадрата, сторона которого равна  $a$ , проведена прямая  $OK$ , перпендикулярная к плоскости квадрата.

Найти расстояния от точки  $K$  до каждой из вершин квадрата, если  $OK = b$ .

**Решение.**

1.  $AC = BD \Rightarrow AO = OC = BO = OD$

2.  $KO \perp \alpha \Rightarrow KO \perp AC, KO \perp BD$

$$\angle KOA = \angle KOB = \angle KOC = \angle KOD$$

3.  $\triangle KOA = \triangle KOB = \triangle KOC = \triangle KOD$

по двум катетам

4.  $KA = KB = KC = KD$

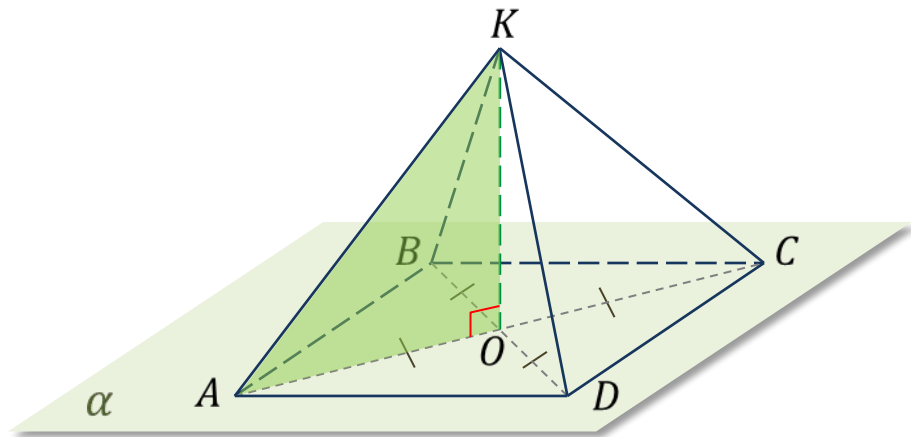
5.  $\triangle ABC$ : по т. Пифагора  $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

6.  $AO = OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

7.  $\triangle KOA$ : по т. Пифагора  $KA = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$

8.  $KA = KB = KC = KD = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$

**Ответ:**  $\sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}$ .



# *Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости*