Геометрическая интерпретация преобразований Лоренца

- Изобразим оси системы координат K' в системе отсчета *К*
- Ось ординат $x' = 0$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 0 \qquad x - Vt = 0$$

$$x = \frac{V}{c} ct$$

- Прямая повернутая
- относительно оси X на угол

$$tg\beta = \frac{V}{c}, \; \beta = arctg\frac{V}{c}$$

- Аналогично для оси t'

$$t' = 0$$

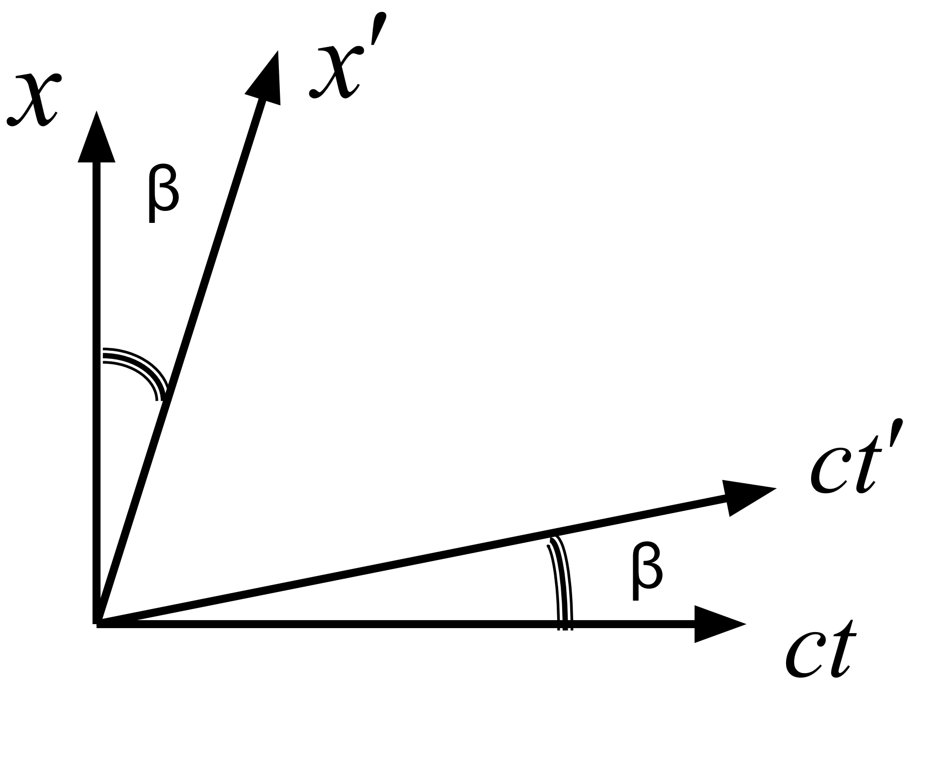
$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 0$$

$$t - \frac{V}{c^2}x = 0$$

$$ct = \frac{V}{c}x$$

Косоугольная система отсчета

K'



- Проградуируем оси K'

- Применим инвариантность интервала

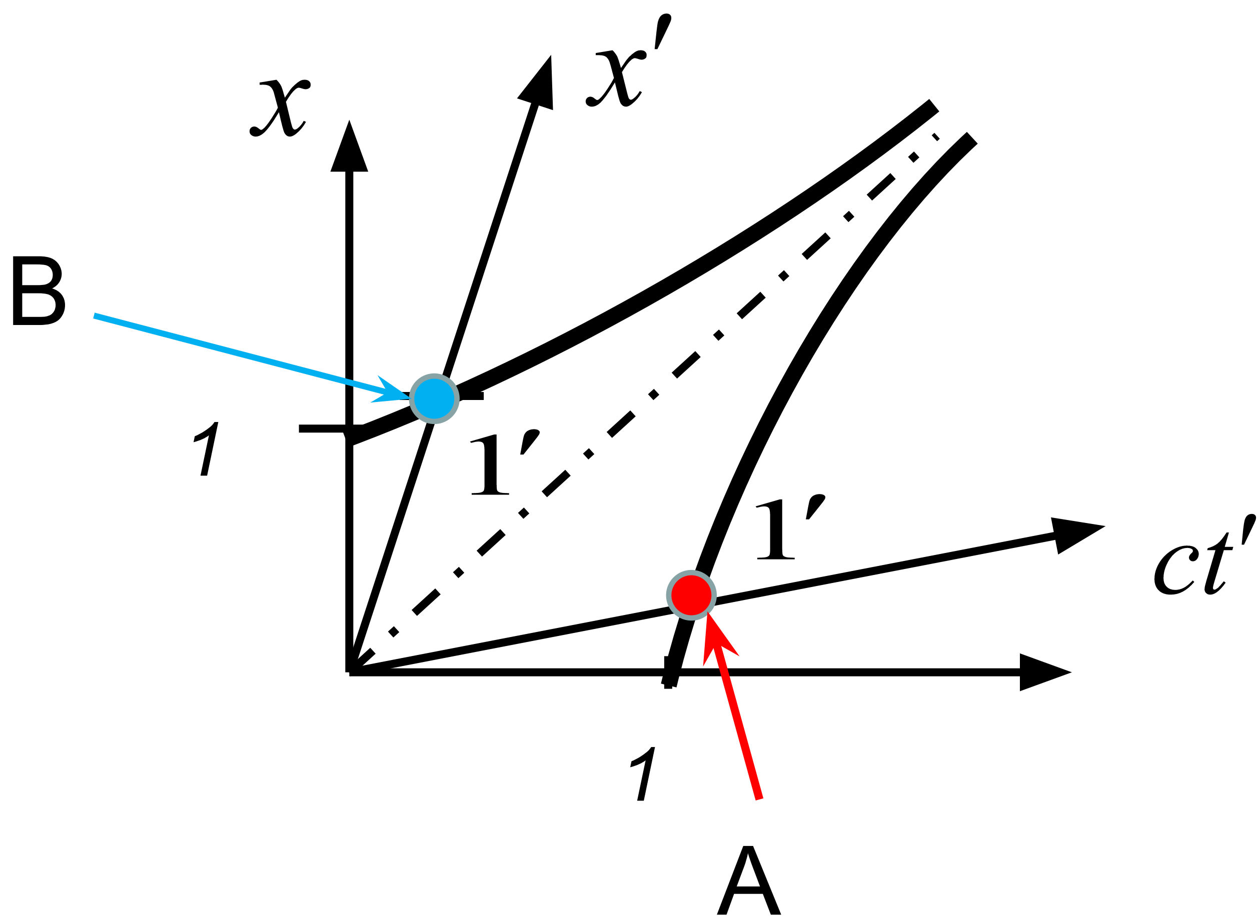
$$c^2t^2 - x^2 = c^2(t')^2 - (x')^2$$

- Точка с координатами

$$x = 0 \text{ , ct=1}$$

$$c^2t'^2 - x'^2 = 1$$

- Гипербола точка А



x
x′
B
1
1′
1′
ct′
1
A

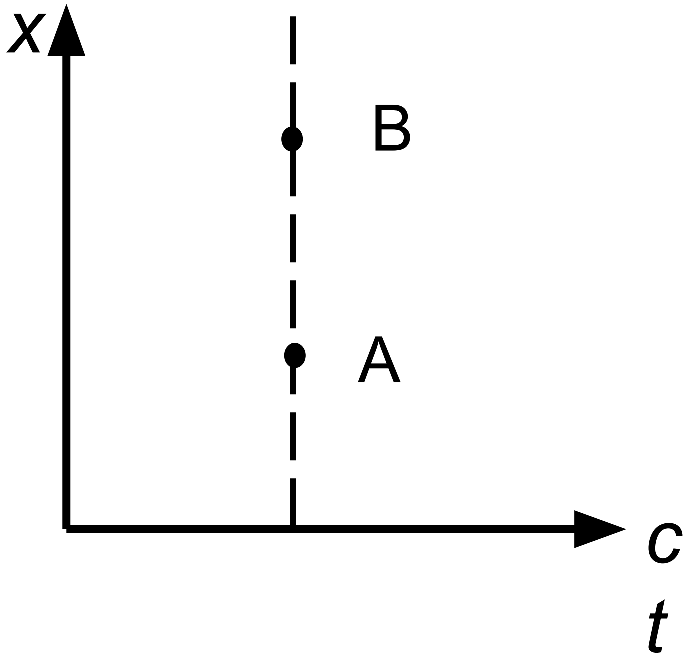
- Аналогично для оси X'

$$x = 1\ ,\ ct = 0$$

$$c^2 t'^2 - x'^2 = -1$$

Точка B

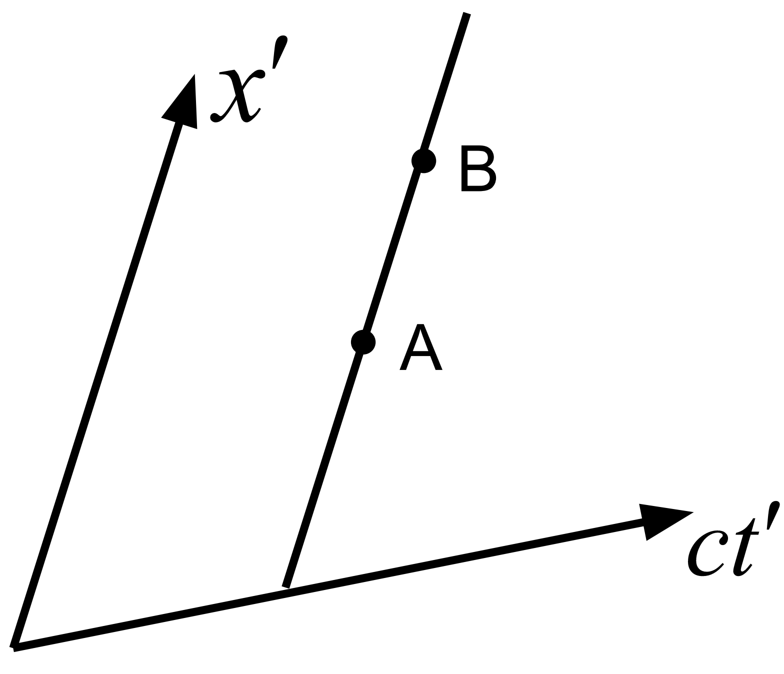
Одновременность



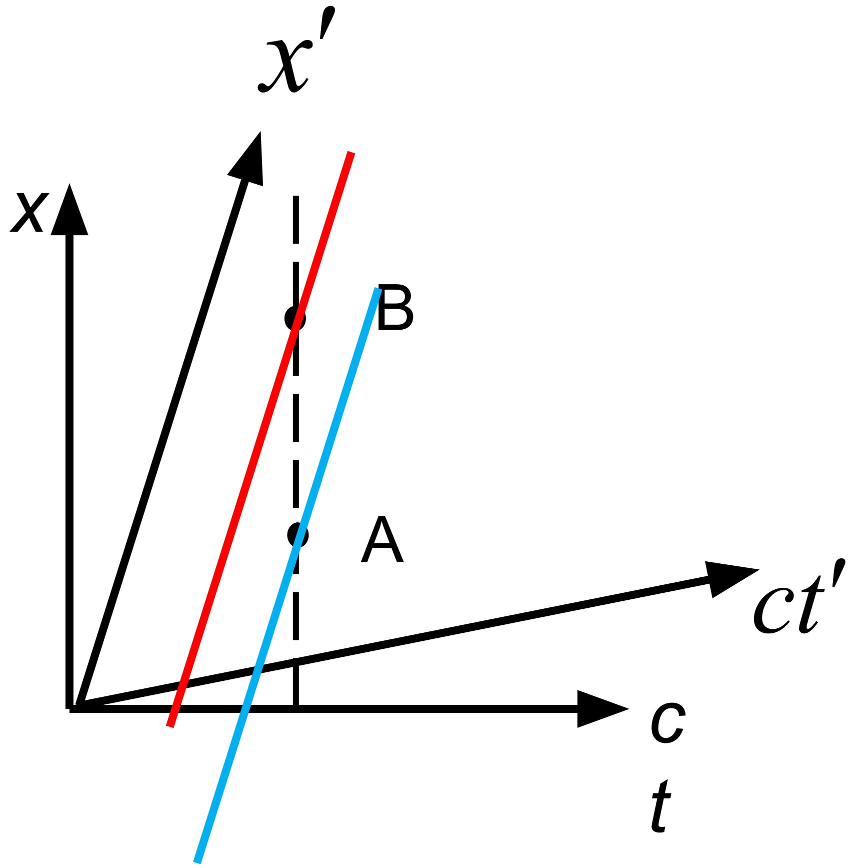
A и B одновременны в системе отсчета K

- A и B одновременны в системе отсчета

K'

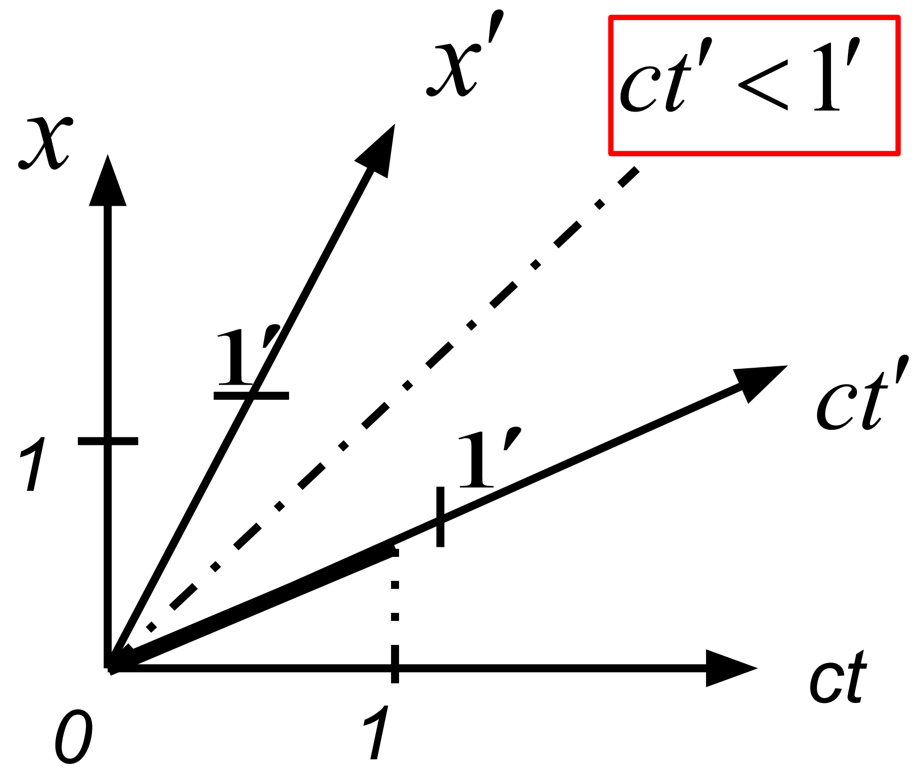


A и B не одновременны в K'



Замедление времени

- Событие произошло в системе отсчета *K* в момент времени $ct = 1$



РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ИМПУЛЬС ЧАСТИЦЫ

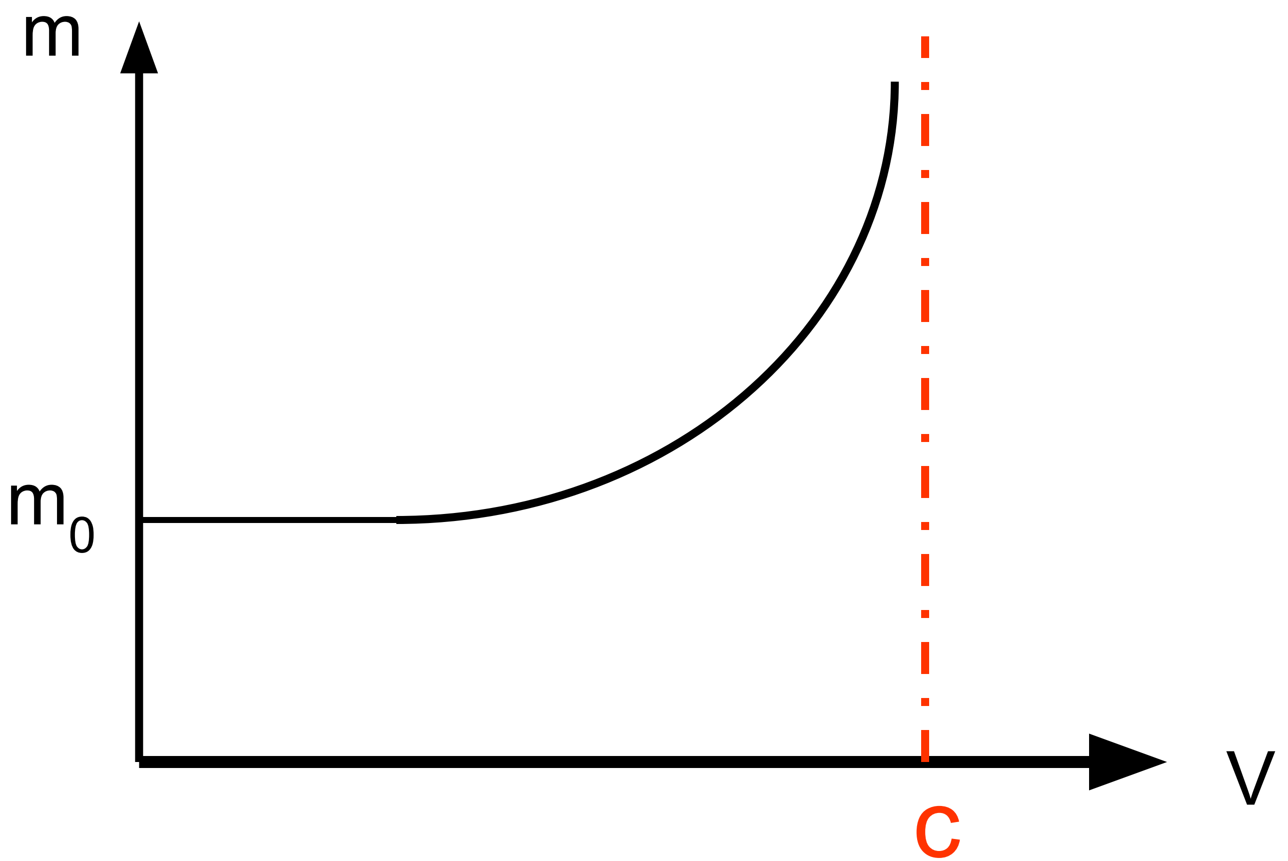
$$\vec{P} = \frac{m_0 \vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

***m_0* – масса покоя** частицы

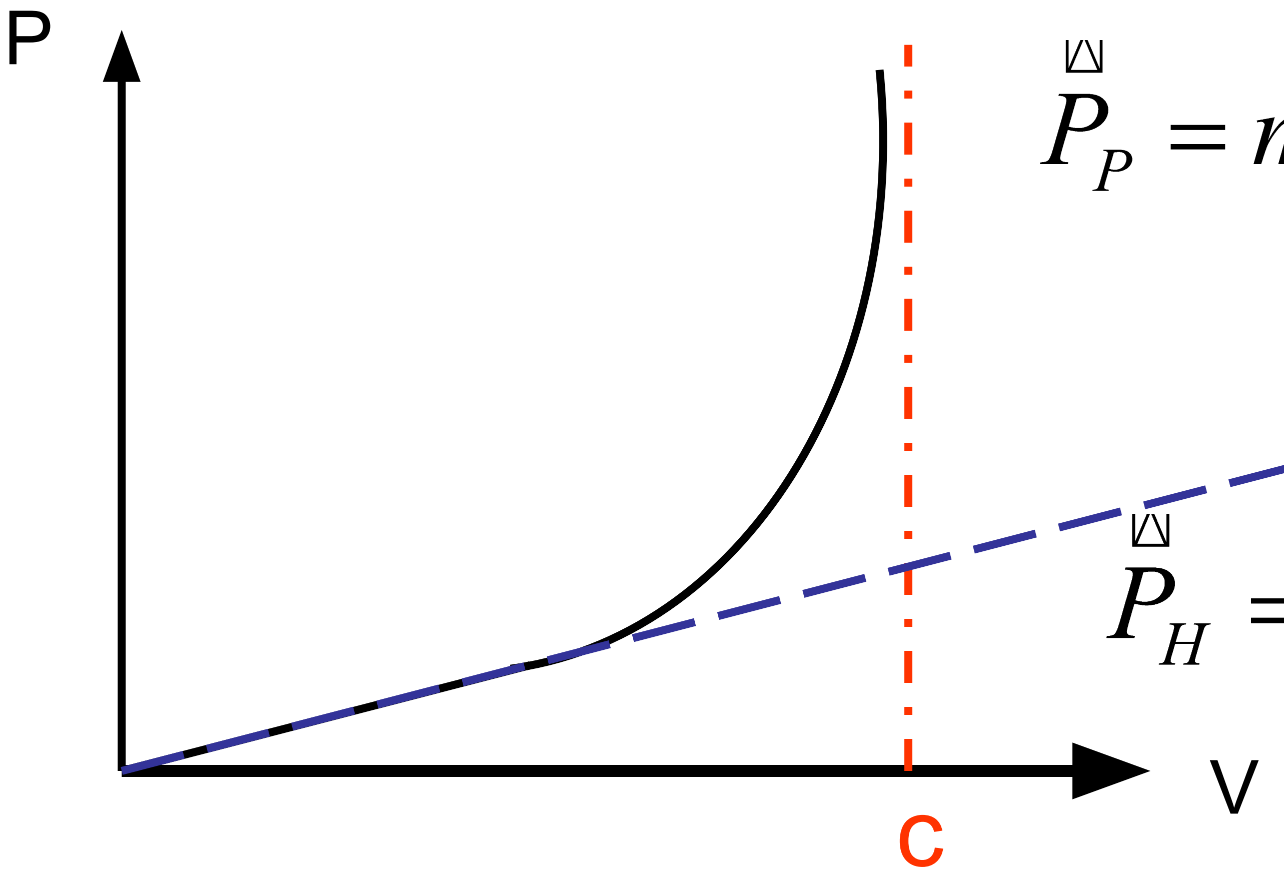
$$\vec{P} = m\vec{V}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

***m* – релятивистская масса** зависит от скорости движения частицы



$V << c$ $\qquad$ $m = m_0$



$$\vec{P}_P = m\,\vec{V}$$

$$\vec{P}_H = m_0\vec{V}$$

$$V << c \qquad m = m_0$$

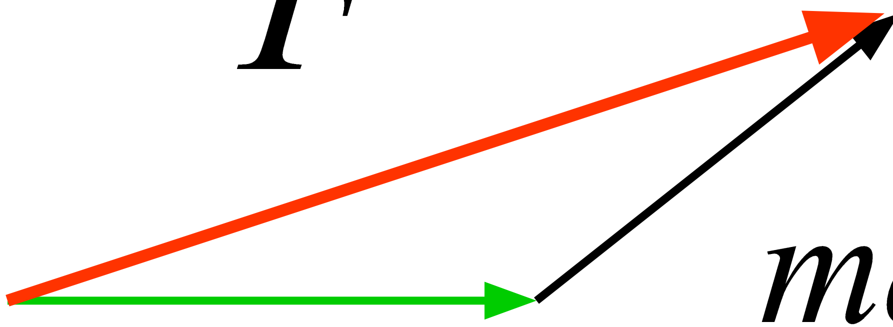
$$\vec{P}_P = m_0\vec{V} = \vec{P}_H$$

Основной закон релятивистской динамики

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\vec{a}}$$



$$\cancel{\boxed{\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{a}}}$$

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ

- Определим кинетическую энергию так же, как в классической механике

$$dT = dA = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right) = \left(\vec{F} \cdot \vec{V}dt\right)$$

$$= \left(\vec{F}dt \cdot \vec{V}\right)$$

- Основное уравнение динамики

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{F}dt = \vec{V}dm + md\vec{V}$$

$$\left(\vec{F}dt \cdot \vec{V}\right) = (\vec{V} \cdot \vec{V})dm + m(d\vec{V} \cdot \vec{V})$$

$$\boxed{= V^2 dm + mVdV = dT}$$

- С другой стороны

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$m^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = m_0^2$$

$$m^2c^2\left(1 - V^2\right) = m_0^2c^2$$

$$m^2c^2 = m_0^2c^2 + m^2V^2$$

$$m^2c^2 = m_0^2c^2 + m^2V^2$$

$$d(m^2c^2) = d(m_0^2c^2) + d(m^2V^2)$$

$$\cancel{2m}c^2dm = \cancel{d(m_0^2c^2)} + \cancel{2m}V^2dm + \cancel{2m^2}VdV$$

$$\boxed{c^2dm = V^2dm + mVdV}$$

$$\boxed{c^2dm = dT}$$

$$\int_{m_0}^{m} c^2\,dm = \int_{0}^{T} dT$$

$$\boxed{T = mc^2 - m_0c^2}$$

Кинетическая энергия

$$\boxed{T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - m_0c^2}$$

- При малых скоростях

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \cong 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{V^2}{c^2}$$

$$T = \cancel{m_0 c^2}\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{V^2}{\cancel{c^2}}\right)-\cancel{m_0 c^2} = \frac{m_0 V^2}{2}$$

- Кинетическая энергия в классической механике

Закон взаимосвязи массы и энергии

$$c^2 dm = dT$$

- Приращение кинетической энергии сопровождается пропорциональным изменением массы тела
- То, что справедливо для одного вида энергии должно быть справедливо для остальных

$$\boxed{E = mc^2}$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$E = T + E_0$$

$$E_0 = m_0 c^2$$ Энергия покоя частицы

- **Кинетическая энергия – это разность между полной энергией и энергией покоя**

$$\boxed{T = E - E_0}$$

- Масса – мера энергосодержания
- Изменение полной энергии тела сопровождается изменением его массы

$$\Delta E = \Delta m c^2$$

ПРИМЕР

- Найти изменение массы 1 л воды при нагревании от 0 до 100º

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

$$\Delta E = mc_p \Delta t$$

$$m = 10^{-3}\,м^3 \cdot \frac{1000кг}{м^3}$$

$$c_p = 4.2 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг \cdot градус}$$

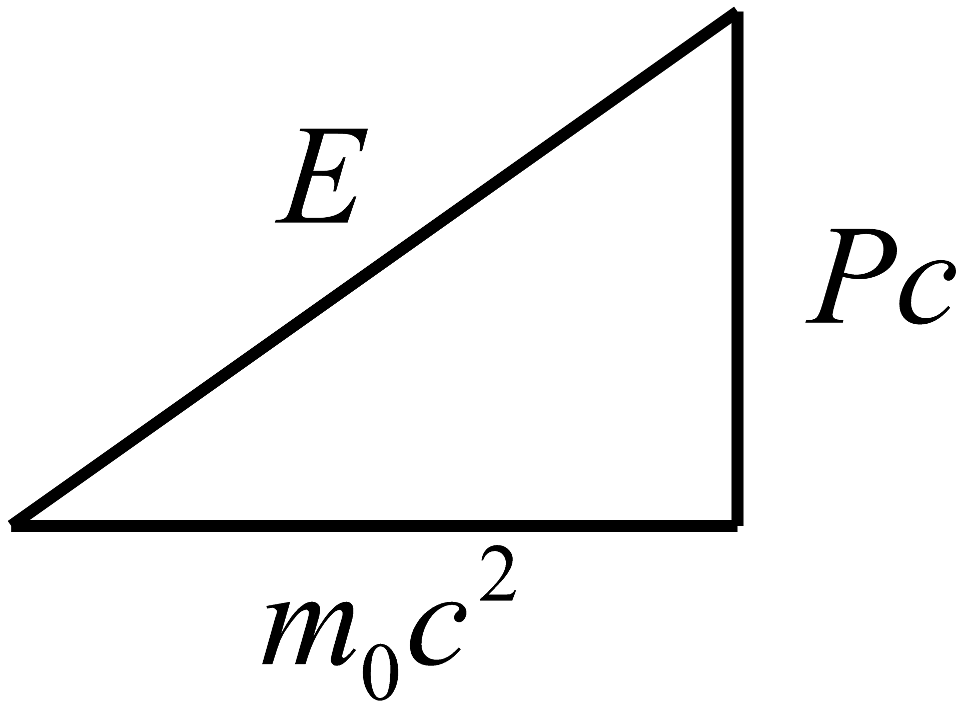
$$\Delta t = 100$$

$$\Delta E = 10^{-3} \cdot 1000 \cdot 4.2 \cdot 10^3 \cdot 100$$

$$= 4.2 \cdot 10^5\,Дж$$

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{4{,}2 \cdot 10^5}{(3 \cdot 10^8)^2} = 0{,}5 \cdot 10^{-16}\,\text{кг}$$

Связь между энергией и импульсом



$$E^2 = (m_0c^2)^2 + (Pc)^2$$

$$E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (Pc)^2}$$

Для частиц с нулевой массой покоя (фотон)

$$E = Pc$$

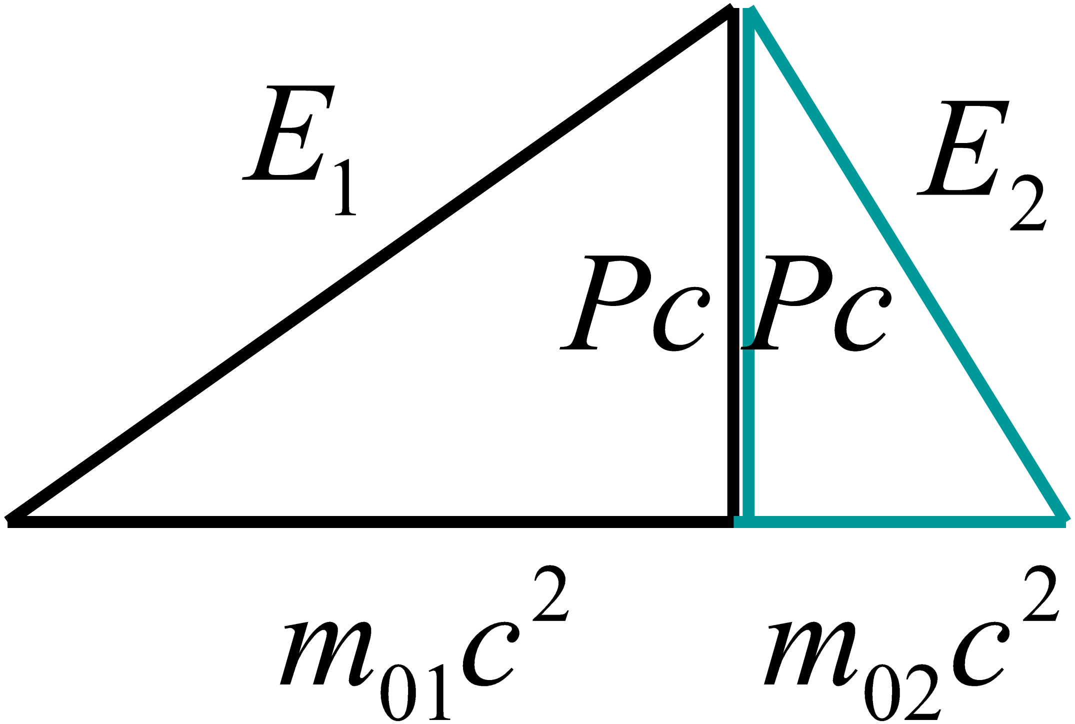
ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ (ЗАДАЧА О РАСПАДЕ)

Законы сохранения энергии и импульса в теории относительности

- При взаимодействии нескольких частиц, при условии , что на систему частиц не действуют внешние силы, сохраняется полная энергия частиц и и полный импульс частиц

$$\sum E_i = const \qquad \sum \vec{P}_i = const$$

- Пусть частица массы M_0 распалась на две частицы с массами m_{01} и m_{02}
- Задача решается в системе центра инерции (СЦИ)


E_1
E_2
Pc
Pc
$m_{01}c^2$
$m_{02}c^2$

$$E = M_0 c^2$$

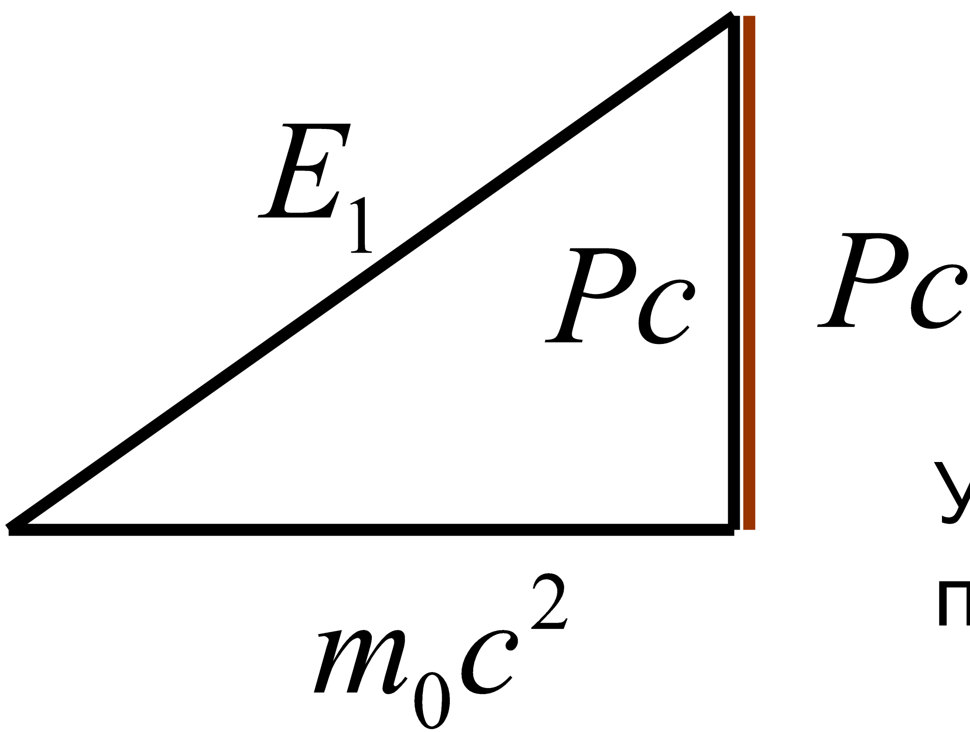
$$E_1 = \sqrt{(m_{01}c^2)^2 + (Pc)^2}$$

$$E_2 = \sqrt{(m_{02}c^2)^2 + (Pc)^2}$$

По закону сохранения энергии

$$E = E_1 + E_2$$

- Если частица массой M_0 распалась на дочернюю частицу массы m_0 и фотон



У фотона масса покоя равна 0

$$E = Mc^2$$

$$E_1 = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (Pc)^2}$$

$$E_\gamma = Pc$$

Закон сохранения энергии:

$$Mc^2 = \sqrt{(m_1 c^2)^2 + (Pc)^2} + Pc$$