Производные и дифференциалы

Опр $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ опред. в окр. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.
Её частной пр-й при $x = x^{(0)}$ (в точке $x^{(0)}$) по аргументу x_i $(i = 1, \dots, n)$ называется предел (если $\exists$):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \equiv \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i}$$

Другое обозначение $f'_{x_i}(x^{(0)})$. Аналогично $n = 1$ можно рассмотреть $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\right|_{\text{пр}}, \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\right|_{\text{лев}}$; а также случаи, когда этим производным можно приписать бескон. значения.

Производные и дифференциалы

Опр. $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ опред. в окр. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.

Её частной пр-й при $x = x^{(0)}$ (в точке $x^{(0)}$) по аргументу x_i $(i = 1, \dots, n)$ называется предел (если $\exists$):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \equiv \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i}$$

Другое обозначение $f'_{x_i}(x^{(0)})$. Аналогично $n = 1$ можно рассмотреть $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\right|_{\text{пр}}$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\right|_{\text{лев}}$; а также случаи, когда этим производным можно приписать бескон. значения.

Если $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ существ. не только при $x = x^{(0)}$, но и в окр-сти, то у нее тоже можно рассмотреть производные:

2-ые: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^{(0)}) \equiv \frac{\partial u}{\partial x_j}(x^{(0)})$, где $u(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$;

3-и: $\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x^{(0)}) \equiv \frac{\partial v}{\partial x_k}(x^{(0)})$, где $v(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$; и т.д.

Производные и дифференциалы

Опр. $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ опред. в окр. $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$.

Её частной пр-й при $x=x^{(0)}$ (в точке $x^{(0)}$) по аргументу x_i $(i=1,\dots,n)$ называется предел (если $\exists$):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\equiv\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+\Delta x_i,x_{i+1}^{(0)},\dots,x_n^{(0)})-f(x_1^{(0)},\dots,x_i^{(0)},\dots,x_n^{(0)})}{\Delta x_i}$$

Другое обозначение $f'_{x_i}(x^{(0)})$. Аналогично $n=1$ можно рассмотреть $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Big|_{пр}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Big|_{лев}$; а также случаи, когда этим производным можно приписать бескон. значения.

Если $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ существ. не только при $x=x^{(0)}$, но и в окр-сти, то у неё тоже можно рассмотреть производные:

2-ые: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x^{(0)})\equiv\frac{\partial u}{\partial x_j}(x^{(0)})$, где $u(x)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$;

3-и: $\frac{\partial^3 f}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}(x^{(0)})\equiv\frac{\partial v}{\partial x_k}(x^{(0)})$, где $v(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x)$; и т.д.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x^{(0)})$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^{(0)})\equiv\frac{\partial w}{\partial x_i}(x^{(0)})$, где $w(x)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$

Эти пр-ные не всегда равны. Пример.

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+x\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]=$$

$$=y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right],\ (x,y)\neq(0,0)$$

В частности, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y$, $y\neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,\ \text{т.е. } \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y\ \forall y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,\Delta y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right]=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y-0}{\Delta y}=-1$$

Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$, $(x,y)\neq(0,0)$,

т.е. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x$ $(x\neq 0)$; но $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x\ \forall x.\ \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right]=1$$

Производные и дифференциалы

Опр. $f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$ опред. в окр. $x^{(0)}=(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$.

Её частной пр-й при $x=x^{(0)}$ (в точке $x^{(0)}$) по аргументу x_i $(i=1,\dots,n)$ называется предел (если $\exists$):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\equiv\lim_{\Delta x_i\to0}\frac{f(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+\Delta x_i,x_{i+1}^{(0)},\dots,x_n^{(0)})-f(x_1^{(0)},\dots,x_i^{(0)},\dots,x_n^{(0)})}{\Delta x_i}$$

Другое обозначение $f'_{x_i}(x^{(0)})$. Аналогично $n=1$ можно рассмотреть $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Big|_{пр}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Big|_{лев}$; а также случаи, когда этим производным можно приписать бескон. значения.

Если $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ существ. не только при $x=x^{(0)}$, но и в окр-сти, то у неё тоже можно рассмотреть производные:

2-ые: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x^{(0)})\equiv\frac{\partial u}{\partial x_j}(x^{(0)})$, где $u(x)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$;

3-и: $\frac{\partial^3 f}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}(x^{(0)})\equiv\frac{\partial v}{\partial x_k}(x^{(0)})$, где $v(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x)$; и т.д.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x^{(0)})$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^{(0)})\equiv\frac{\partial w}{\partial x_i}(x^{(0)})$, где $w(x)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$

Т1. $f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$, где $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$, причём $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x)$ непр. при $x=x^{(0)}$. $\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^{(0)})=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x^{(0)})$.

Эти пр-ные не всегда равны. Пример.

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+x\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]=$$
$$=y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right],\ (x,y)\neq(0,0)$$

В частности, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y$, $y\neq0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$, т.е. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y\ \forall y$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{1}{\Delta y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,\Delta y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right]=\lim_{\Delta y\to0}\frac{-\Delta y-0}{\Delta y}=-1$$

Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$, $(x,y)\neq(0,0)$,

т.е. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x\ (x\neq0)$; но $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x\ \forall x.\ \Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right]=1$$

Д-во Т1. Будем писать только x_i и x_j. Другие аргументы, равные $x_k^{(0)}$ $(k\neq i, k\neq j)$ не пишем.

$$W=f(x_i^{(0)}+\Delta x_i,x_j^{(0)}+\Delta x_j)-f(x_i^{(0)}+\Delta x_i,x_j^{(0)})-f(x_i^{(0)},x_j^{(0)}+\Delta x_j)+f(x_i^{(0)},x_j^{(0)})$$

$g_1(x_i)=f(x_i,x_j^{(0)}+\Delta x_j)-f(x_i,x_j^{(0)})$ в окр. $x_i^{(0)}$

$g_2(x_j)=f(x_i^{(0)}+\Delta x_i,x_j)-f(x_i^{(0)},x_j)$ в окр. $x_j^{(0)}$

$$W=g_1(x_i^{(0)}+\Delta x_i)-g_1(x_i^{(0)})=g_2(x_j^{(0)}+\Delta x_j)-g_2(x_j^{(0)})\Rightarrow(\text{т. Лагранжа})\Rightarrow g_1'(x_i^{(0)}+\theta_1\Delta x_i)\cdot\Delta x_i=g_2'(x_j^{(0)}+\theta_2\Delta x_j)\cdot\Delta x_j$$

Но $g_1'(x_i^{(0)}+\theta_1\Delta x_i)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i^{(0)}+\theta_1\Delta x_i,x_j^{(0)}+\Delta x_j)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i^{(0)}+\theta_1\Delta x_i,x_j^{(0)})=(\text{т.Л.})=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_i^{(0)}+\theta_1\Delta x_i,x_j^{(0)}+\theta_3\Delta x_j)\cdot\Delta x_j$. Аналогично

$g_2'(x_j^{(0)}+\theta_2\Delta x_j)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i^{(0)}+\Delta x_i,x_j^{(0)}+\theta_2\Delta x_j)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_i^{(0)},x_j^{(0)}+\theta_2\Delta x_j)=(\text{т.Л.})=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x_i^{(0)}+\theta_4\Delta x_i,x_j^{(0)}+\theta_2\Delta x_j)\cdot\Delta x_i.\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x_i^{(0)}+\theta_1\Delta x_i,x_j^{(0)}+\theta_3\Delta x_j)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x_i^{(0)}+\theta_4\Delta x_i,x_j^{(0)}+\theta_2\Delta x_j),\quad\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\in(0,1)$$

$x\to x^{(0)}$, т.к. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_i}(x)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x)$ непр. при $x=x^{(0)}$ $\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(x^{(0)})=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x^{(0)})$. Т. доказана.

Опр. $f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$, $\omega \doteq (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{E}_n : \|\omega\| = 1$.

Производной $f(x)$ при $x = x^{(0)}$ в направлении ω называв. (если $\exists$):

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) \equiv \lim_{t \to 0+0} \frac{f(x^{(0)} + t\omega) - f(x^{(0)})}{t}$$

Опр. $f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$, $\omega \doteq (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{E}_n : \|\omega\| = 1$.

Производной $f(x)$ при $x = x^{(0)}$ в направлении ω назыв. (если $\exists$):

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) \equiv \lim_{t \to 0+0} \frac{f(x^{(0)} + t\omega) - f(x^{(0)})}{t}$$

$$\omega = e_i = (0, \dots, 0, \overset{i\text{-е место}}{1}, 0, \dots, 0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = \lim_{t \to 0+0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + t, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x^{(0)})}{t} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Big|_{\text{пр}}; \quad \omega = -e_i \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = \lim_{t \to 0+0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} - t, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x^{(0)})}{t} =$$

$$= (-t = \Delta x_i) = \lim_{\Delta x_i \to 0-0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x^{(0)})}{-\Delta x_i} = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Big|_{\text{лев}}$$

Опр. $f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$, $\omega \doteq (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{E}_n : \|\omega\| = 1$.

Производной $f(x)$ при $x = x^{(0)}$ в направлении ω назыв. (если $\exists$):

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) \equiv \lim_{t \to 0+0} \frac{f(x^{(0)} + t\omega) - f(x^{(0)})}{t}$$

$$\omega = e_i = (0, \dots, 0, \overset{i\text{-е место}}{1}, 0, \dots, 0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = \lim_{t \to 0+0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + t, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x^{(0)})}{t} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Big|_{\text{пр}}; \quad \omega = -e_i \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = \lim_{t \to 0+0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} - t, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x^{(0)})}{t} =$$

$$= (-t = \Delta x_i) = \lim_{\Delta x_i \to 0-0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x^{(0)})}{-\Delta x_i} = -\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Big|_{\text{лев}}$$

Связи произв. с непрер. нет. Примеры в $\mathbb{E}_2$.

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$ (Вращение графика $\varphi(x) = x \sin \frac{1}{x}$ вокруг Oz)

$f(x,y)$ непр. $\forall (x,y) \in \mathbb{E}_2$. $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow$ непр. как элемент. ф-я

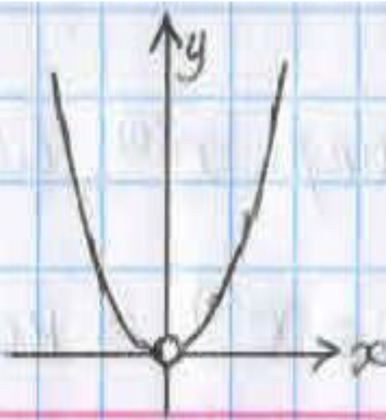
а если $(x,y) = (0,0)$, то $|f(x,y)| \le \sqrt{x^2+y^2}$, т.е. $-\sqrt{x^2+y^2} \le f(x,y) \le \sqrt{x^2+y^2}$;

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

$$\forall \omega \in \mathbb{E}_2 : \|\omega\| = 1, \text{ т.е. } \omega = (\cos\alpha, \sin\alpha) \Rightarrow \frac{f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) - f(0,0)}{t} = \frac{t \sin\frac{1}{t}}{t} =$$

$$= \sin\frac{1}{t}, \text{ т.е. } \forall \alpha \ \nexists \frac{\partial f}{\partial \omega}(0,0), \text{ т.к. } \nexists \lim_{t \to 0+0} \sin\frac{1}{t}$$

2. $f(x,y)=\begin{cases}1, & y=x^2, \ x\neq 0\\ 0 & \text{в ост. точках}\end{cases}$



$\left.\begin{array}{l}\text{Эта ф-я разрывна в любой точке } y=x^2,\\ \text{однако } \forall\omega=(\cos\alpha,\sin\alpha)\ \dfrac{\partial f}{\partial\omega}(0,0)=0\end{array}\right\}$ – самост.

Опр. $y=f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$. Если приращ.

$\Delta y = f(x^{(0)}+\Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A=(A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{E}_n$, а $\alpha(\Delta x) = \bar{\bar{o}}(\|\Delta x\|)$ при

$\|\Delta x\| \to 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$

(при $x = x^{(0)}$), а $(A, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$ – её

(полным) дифференциалом (1-го порядка)

$$dy = (A, \Delta x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$$

Опр. $y=f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$. Если приращ.

$\Delta y = f(x^{(0)}+\Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A=(A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{E}_n$, а $\alpha(\Delta x) = \bar{\bar{o}}(\|\Delta x\|)$ при

$\|\Delta x\| \to 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$

(при $x=x^{(0)}$), а $(A, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$ – её

(полным) дифференциалом (1-го порядка)

$$dy = (A, \Delta x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$$

x – незав. перем. $dx_i \equiv \Delta x_i$, $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$

$$dy = (A, dx) = \sum_{i=1}^{n} A_i dx_i = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$$

Опр. $y=f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$. Если приращ. $\Delta y = f(x^{(0)}+\Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A=(A_1,\dots,A_n)\in \mathbb{E}_n$, а $\alpha(\Delta x)=\bar{\bar{o}}(\|\Delta x\|)$ при $\|\Delta x\|\to 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$ (при $x=x^{(0)}$), а $(A,\Delta x)=A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n$ – её (полном) дифференциалом (1-го порядка)

$$dy=(A,\Delta x)=\sum_{i=1}^{n}A_i\Delta x_i=A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n$$

x – незав. перем. $dx_i\equiv\Delta x_i$, $dx=(dx_1,\dots,dx_n)$

$$dy=(A,dx)=\sum_{i=1}^{n}A_i dx_i=A_1dx_1+\dots+A_ndx_n$$

Т2 $y=f(x)$ дифф. при $x=x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ непр. при $x=x^{(0)}$.

Д-во т. 2. $\Delta y=(A,\Delta x)+\alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x)=\bar{\bar{o}}(\|\Delta x\|)$ $(\|\Delta x\|\to 0)$

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1:\ \forall\Delta x,\ \|\Delta x\|<\delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)|\le\frac{\varepsilon}{2}\|\Delta x\|$.

$\delta_2=\frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} \Rightarrow \exists\delta=\min(\delta_1,\delta_2,1)>0:\ \forall x,\ \rho(x,x^{(0)})<\delta$,

т.е. $\|\Delta x\|=\|x-x^{(0)}\|=\rho(x,x^{(0)})<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x^{(0)})|=|\Delta y|\le$

$\le|(A,\Delta x)|+|\alpha(\Delta x)|\le\|A\|\cdot\|\Delta x\|+\frac{\varepsilon}{2}\|\Delta x\|\le\|A\|\cdot\frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)}+$

$+\frac{\varepsilon}{2}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, т.е. $f(x)$ непр. при $x=x^{(0)}$.

Т. д-зана.

<u>Опр.</u> $y=f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$. Если приращ.

$\Delta y = f(x^{(0)}+\Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A=(A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{E}_n$, а $\alpha(\Delta x) = \bar{\bar{o}}(\|\Delta x\|)$ при $\|\Delta x\| \to 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$ (при $x=x^{(0)}$), а $(A, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n$ – её (полным) дифференциалом (1-го порядка)

$$dy = (A, \Delta x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n$$

x – незав. перем. $dx_i \equiv \Delta x_i$, $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$

$$dy = (A, dx) = \sum_{i=1}^{n} A_i dx_i = A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n$$

<u>Т2</u> $y=f(x)$ дифф. при $x=x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ непр. при $x=x^{(0)}$.

Наличие всех частных пр-ых при $x=x^{(0)}$ не гарантирует непрерывности при $x=x^{(0)}$ (см. пример 2)

Д-во т. 2. $\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x) = \bar{\bar{o}}(\|\Delta x\|)$ $(\|\Delta x\| \to 0)$

т.е. $\underline{\forall \varepsilon > 0}$ $\exists \delta_1 : \forall \Delta x,\ \|\Delta x\| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\|$.

$\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} \Rightarrow \underline{\exists \delta} = \min(\delta_1, \delta_2, 1) \underline{> 0 : \forall x,\ \rho(x, x^{(0)}) < \delta},$

т.е. $\|\Delta x\| = \|x - x^{(0)}\| = \rho(x, x^{(0)}) < \delta \Rightarrow \underline{|f(x) - f(x^{(0)})|} = |\Delta y| \leq$

$\leq |(A, \Delta x)| + |\alpha(\Delta x)| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| + \frac{\varepsilon}{2}\|\Delta x\| \leq \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} +$

$+ \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\varepsilon}$, т.е. $f(x)$ непр. при $x = x^{(0)}$.

Т. д-зана.

Опр. $y=f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$. Если приращ.

$\Delta y = f(x^{(0)}+\Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A=(A_1,\dots,A_n)\in \mathbb{E}_n$, а $\alpha(\Delta x)=\bar{\bar{o}}(\|\Delta x\|)$ при $\|\Delta x\|\to 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$ (при $x=x^{(0)}$), а $(A,\Delta x)=A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n$ – её (полным) дифференциалом (1-го порядка)

$$dy=(A,\Delta x)=\sum_{i=1}^{n} A_i\Delta x_i = A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n$$

x – незав. перем. $dx_i\equiv \Delta x_i$, $dx=(dx_1,\dots,dx_n)$

$$dy=(A,dx)=\sum_{i=1}^{n} A_i dx_i = A_1 dx_1+\dots+A_n dx_n$$

Т2 $y=f(x)$ дифф. при $x=x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ непр. при $x=x^{(0)}$.

Наличие всех частных пр-ных при $x=x^{(0)}$ не гарантирует непрерывности при $x=x^{(0)}$ (см. пример 2)

Т3. $y=f(x)$ дифф. при $x=x^{(0)}$, $dy=A_1dx_1+\dots+A_ndx_n$

$\Rightarrow \forall i=1,\dots,n\ \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})=A_i$

Д-во т. 2. $\Delta y=(A,\Delta x)+\alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x)=\bar{\bar{o}}(\|\Delta x\|)(\|\Delta x\|\to 0)$

т.е. $\underline{\forall\varepsilon>0}\ \exists\delta_1: \forall\Delta x,\ \|\Delta x\|<\delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)|\le \frac{\varepsilon}{2}\|\Delta x\|$.

$\delta_2=\dfrac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} \Rightarrow \underline{\exists\delta}=\min(\delta_1,\delta_2,1)\underline{>0: \forall x,\ \rho(x,x^{(0)})<\delta}$,

т.е. $\|\Delta x\|=\|x-x^{(0)}\|=\rho(x,x^{(0)})<\delta \underline{\Rightarrow |f(x)-f(x^{(0)})|}=|\Delta y|\le$

$\le |(A,\Delta x)|+|\alpha(\Delta x)|\le \|A\|\cdot\|\Delta x\|+\frac{\varepsilon}{2}\|\Delta x\|\le \|A\|\cdot\dfrac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)}$

$+\frac{\varepsilon}{2}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\underline{\varepsilon}$, т.е. $f(x)$ непр. при $x=x^{(0)}$.

Т. д-зана.

Д-во т. 3. $\Delta y=(A,\Delta x)+\alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x)=\bar{\bar{o}}(\|\Delta x\|)$ $(\|\Delta x\|\to 0)$.

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall\Delta x,\ \|\Delta x\|<\delta\Rightarrow|\alpha(\Delta x)|\le\frac{\varepsilon}{2}\|\Delta x\|$.

$\Delta x=(0,\dots,0,\Delta x_i,0,\dots,0)$, $\|\Delta x\|=|\Delta x_i|$. $\Rightarrow \forall\Delta x_i,\ 0<|\Delta x_i|<\delta\Rightarrow$

$$\left|\frac{\overbrace{f(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+\Delta x_i,x_{i+1}^{(0)},\dots,x_n^{(0)})-f(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)},x_{i+1}^{(0)},\dots,x_n^{(0)})}^{\Delta y}}{\Delta x_i}-A_i\right|$$

$$=\left|\frac{\Delta y}{\Delta x_i}-A_i\right|=\left|\frac{A_i\Delta x_i+\alpha(\Delta x)}{\Delta x_i}-A_i\right|=\left|A_i+\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x_i}-A_i\right|\le\frac{\varepsilon\cdot\|\Delta x\|}{2\cdot|\Delta x_i|}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

т.е. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})=A_i$. Теорема доказана.

Опр. $y=f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$. Если приращ. $\Delta y = f(x^{(0)}+\Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A=(A_1,\dots,A_n)\in \mathbb{E}_n$, а $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$ при $\|\Delta x\|\to 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$ (при $x=x^{(0)}$), а $(A,\Delta x) = A_1\Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$ – её (полным) дифференциалом (1-го порядка)

$$dy = (A,\Delta x) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i = A_1\Delta x_1 + \dots + A_n\Delta x_n$$

x – незав. перем. $dx_i \equiv \Delta x_i$, $dx = (dx_1,\dots,dx_n)$

$$dy = (A, dx) = \sum_{i=1}^n A_i dx_i = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$$

Т2 $y=f(x)$ дифф. при $x=x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ непр. при $x=x^{(0)}$.

Наличие всех частных пр-ных при $x=x^{(0)}$ не гарантирует непрерывности при $x=x^{(0)}$ (см. пример 2)

Т3. $y=f(x)$ дифф. при $x=x^{(0)}$, $dy = A_1dx_1+\dots+A_ndx_n$ $\Rightarrow \forall i=1,\dots,n \ \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = A_i$

$$dy = \sum_{i=1}^n A_i dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Д-во т. 2. $\Delta y = (A,\Delta x) + \alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$ $(\|\Delta x\|\to 0)$

т.е. $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta_1: \forall \Delta x, \|\Delta x\|<\delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \le \frac{\varepsilon}{2}\|\Delta x\|$.

$\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} \Rightarrow \exists \delta = \min(\delta_1,\delta_2,1) > 0: \forall x, \rho(x,x^{(0)})<\delta$,

т.е. $\|\Delta x\| = \|x - x^{(0)}\| = \rho(x,x^{(0)}) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| = |\Delta y| \le$ $\le |(A,\Delta x)| + |\alpha(\Delta x)| \le \|A\|\cdot\|\Delta x\| + \frac{\varepsilon}{2}\|\Delta x\| \le \|A\|\cdot\frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} +$ $+\frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т.е. $f(x)$ непр. при $x=x^{(0)}$.

Т. д-зана.

Д-во т. 3. $\Delta y = (A,\Delta x) + \alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$ $(\|\Delta x\|\to 0)$,

т.е. $\forall\varepsilon>0 \ \exists \delta>0: \forall \Delta x, \|\Delta x\|<\delta \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \le \frac{\varepsilon}{2}\|\Delta x\|$.

$\Delta x = (0,\dots,0,\Delta x_i, 0,\dots,0)$, $\|\Delta x\| = |\Delta x_i|$. $\Rightarrow \forall \Delta x_i, 0<|\Delta x_i|<\delta \Rightarrow$

$$\left|\frac{\overbrace{f(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+\Delta x_i, x_{i+1}^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)},x_{i+1}^{(0)},\dots,x_n^{(0)})}^{\Delta y}}{\Delta x_i} - A_i\right| =$$

$$= \left|\frac{\Delta y}{\Delta x_i} - A_i\right| = \left|\frac{A_i\Delta x_i + \alpha(\Delta x)}{\Delta x_i} - A_i\right| = \left|A_i + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x_i} - A_i\right| \le \frac{\varepsilon\cdot\|\Delta x\|}{2\cdot|\Delta x_i|} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т.е. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = A_i$. Теорема доказана.

Опр. $y=f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$. Если приращ.
$\Delta y = f(x^{(0)}+\Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A=(A_1,\dots,A_n)\in \mathbb{E}_n$, а $\alpha(\Delta x)=\overline{\overline{o}}(\|\Delta x\|)$ при $\|\Delta x\|\to 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$ (при $x=x^{(0)}$), а $(A,\Delta x)=A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n$ — её (полным) дифференциалом (1-го порядка)

$$dy=(A,\Delta x)=\sum_{i=1}^n A_i\Delta x_i = A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n$$

x — незав. перем. $dx_i\equiv\Delta x_i$, $dx=(dx_1,\dots,dx_n)$

$$dy=(A,dx)=\sum_{i=1}^n A_i dx_i = A_1dx_1+\dots+A_ndx_n$$

T2 $y=f(x)$ дифф. при $x=x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ непр. при $x=x^{(0)}$.

Наличие всех частных пр-ных при $x=x^{(0)}$ не гарантирует непрерывности при $x=x^{(0)}$ (см. пример 2)

T3. $y=f(x)$ дифф. при $x=x^{(0)}$, $dy=A_1dx_1+\dots+A_ndx_n$
$\Rightarrow \forall i=1,\dots,n\ \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})=A_i$

$$dy=\sum_{i=1}^n A_i dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

T4. $f(x)$ опр. в окр. $x^{(0)}$ и $\forall i=1,\dots,n\ \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ в этой окр., все $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ непр. при $x=x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ дифф. в $x^{(0)}$.

Д-во т.2. $\Delta y=(A,\Delta x)+\alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x)=\overline{\overline{o}}(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\|\to 0$)

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1: \forall\Delta x, \|\Delta x\|<\delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)|\le \frac{\varepsilon}{2}\|\Delta x\|$.

$\delta_2=\frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} \Rightarrow \exists\delta=\min(\delta_1,\delta_2,1)>0: \forall x, \rho(x,x^{(0)})<\delta$,

т.е. $\|\Delta x\|=\|x-x^{(0)}\|=\rho(x,x^{(0)})<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x^{(0)})|=|\Delta y|\le$
$\le |(A,\Delta x)|+|\alpha(\Delta x)|\le\|A\|\cdot\|\Delta x\|+\frac{\varepsilon}{2}\|\Delta x\|\le\|A\|\cdot\frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)}+$
$+\frac{\varepsilon}{2}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, т.е. $f(x)$ непр. при $x=x^{(0)}$.

Т. д-зана.

Д-во т.3. $\Delta y=(A,\Delta x)+\alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x)=\overline{\overline{o}}(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\|\to 0$),

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall\Delta x, \|\Delta x\|<\delta \Rightarrow |\alpha(\Delta x)|\le\frac{\varepsilon}{2}\|\Delta x\|$.

$\Delta x=(0,\dots,0,\Delta x_i,0,\dots,0)$, $\|\Delta x\|=|\Delta x_i|$. $\Rightarrow \forall\Delta x_i, 0<|\Delta x_i|<\delta\Rightarrow$

$$\left|\frac{\overbrace{f(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+\Delta x_i,x_{i+1}^{(0)},\dots,x_n^{(0)})-f(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)},x_{i+1}^{(0)},\dots,x_n^{(0)})}^{\Delta y}}{\Delta x_i}-A_i\right|=$$

$$=\left|\frac{\Delta y}{\Delta x_i}-A_i\right|=\left|\frac{A_i\Delta x_i+\alpha(\Delta x)}{\Delta x_i}-A_i\right|=\left|A_i+\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x_i}-A_i\right|\le\frac{\varepsilon\cdot\|\Delta x\|}{2\cdot|\Delta x_i|}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

т.е. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})=A_i$. Теорема доказана.

Д-во т.4. $\Delta y = f(x^{(0)}+\Delta x)-f(x^{(0)})=f(x_1^{(0)}+\Delta x_1,\dots,x_n^{(0)}+\Delta x_n)-f(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})=$

$$=\sum_{i=1}^n\left[f(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+\Delta x_i,\dots,x_n^{(0)}+\Delta x_n)-f(x_1^{(0)},\dots,x_i^{(0)},x_{i+1}^{(0)}+\Delta x_{i+1},\dots,x_n^{(0)}+\Delta x_n)\right]=$$

$$\overset{0<\theta_i<1}{=}(\text{т. Л.})=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+\theta_i\Delta x_i,x_{i+1}^{(0)}+\Delta x_{i+1},\dots,x_n^{(0)}+\Delta x_n)\cdot\Delta x_i=$$

$=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\cdot\Delta x_i+\alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)=\sum_{i=1}^n\alpha_i(\Delta x)\cdot\Delta x_i$,

$\alpha_i(\Delta x)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+\theta_i\Delta x_i,x_{i+1}^{(0)}+\Delta x_{i+1},\dots,x_n^{(0)}+\Delta x_n)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$

$\lim\limits_{\Delta x\to\theta_n}\alpha_i(\Delta x)=0$ из-за непр., $|\Delta x_i|\le\|\Delta x\|\Rightarrow|\alpha(\Delta x)|\le$

$$\le\sum_{i=1}^n|\alpha_i(\Delta x)|\cdot|\Delta x_i|\le\|\Delta x\|\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^n|\alpha_i(\Delta x)|}_{\to 0}=\overline{\overline{o}}(\|\Delta x\|)$$

Теор. д-зана.

<u>Опр.</u> $y=f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$. Если приращ. $\Delta y = f(x^{(0)}+\Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A=(A_1,\dots,A_n)\in \mathbb{E}_n$, а $\alpha(\Delta x)=\overline{\overline{o}}(\|\Delta x\|)$ при $\|\Delta x\|\to 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$ (при $x=x^{(0)}$), а $(A,\Delta x)=A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n$ — её (полным) дифференциалом (1-го порядка)

$$dy=(A,\Delta x)=\sum_{i=1}^n A_i\Delta x_i = A_1\Delta x_1+\dots+A_n\Delta x_n$$

x — незав. перем. $dx_i\equiv\Delta x_i$, $dx=(dx_1,\dots,dx_n)$

$$dy=(A,dx)=\sum_{i=1}^n A_i dx_i = A_1dx_1+\dots+A_ndx_n$$

<u>Т2</u> $y=f(x)$ дифф. при $x=x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ непр. при $x=x^{(0)}$.

Наличие всех частных пр-ных при $x=x^{(0)}$ не гарантирует непрерывности при $x=x^{(0)}$ (см. пример 2)

<u>Т3.</u> $y=f(x)$ дифф. при $x=x^{(0)}$, $dy=A_1dx_1+\dots+A_ndx_n$ $\Rightarrow \forall i=1,\dots,n\ \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})=A_i$

$$dy=\sum_{i=1}^n A_i dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

<u>Т4.</u> $f(x)$ опр. в окр. $x^{(0)}$ и $\forall i=1,\dots,n\ \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ в этой окр., все $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ непр. при $x=x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ дифф. в $x^{(0)}$.

<u>Опр.</u> $f(x)\in C_m$ в обл. $E\subset \mathbb{E}_n$, если все её m-ые частные пр-ые непр. в каждой точке E.

<u>Сл.</u> $f(x)\in C_1$ в обл. $E \Rightarrow f(x)$ дифф. $\forall x\in E$.

Д-во Т.2. $\Delta y=(A,\Delta x)+\alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x)=\overline{\overline{o}}(\|\Delta x\|)$ $(\|\Delta x\|\to 0)$

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1: \forall \Delta x,\ \|\Delta x\|<\delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)|\le \frac{\varepsilon}{2}\|\Delta x\|$.

$\delta_2=\frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} \Rightarrow \exists\delta=\min(\delta_1,\delta_2,1)>0: \forall x,\ \rho(x,x^{(0)})<\delta$,

т.е. $\|\Delta x\|=\|x-x^{(0)}\|=\rho(x,x^{(0)})<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x^{(0)})|=|\Delta y|\le$

$\le |(A,\Delta x)|+|\alpha(\Delta x)|\le \|A\|\cdot\|\Delta x\|+\frac{\varepsilon}{2}\|\Delta x\|\le \|A\|\cdot\frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)}+$

$+\frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, т.е. $f(x)$ непр. при $x=x^{(0)}$. Т. д-зана.

Д-во Т.3. $\Delta y=(A,\Delta x)+\alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x)=\overline{\overline{o}}(\|\Delta x\|)$ $(\|\Delta x\|\to 0)$,

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall\Delta x,\ \|\Delta x\|<\delta \Rightarrow |\alpha(\Delta x)|\le\frac{\varepsilon}{2}\|\Delta x\|$.

$\Delta x=(0,\dots,0,\Delta x_i,0,\dots,0)$, $\|\Delta x\|=|\Delta x_i|$. $\Rightarrow \forall \Delta x_i,\ 0<|\Delta x_i|<\delta \Rightarrow$

$$\left|\frac{\overbrace{f(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+\Delta x_i,x_{i+1}^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)},x_{i+1}^{(0)},\dots,x_n^{(0)})}^{\Delta y}}{\Delta x_i} - A_i\right| =$$

$$=\left|\frac{\Delta y}{\Delta x_i}-A_i\right| = \left|\frac{A_i\Delta x_i+\alpha(\Delta x)}{\Delta x_i}-A_i\right| = \left|A_i+\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x_i}-A_i\right|\le\frac{\varepsilon\cdot\|\Delta x\|}{2\cdot|\Delta x_i|}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

т.е. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})=A_i$. Теорема доказана.

Д-во Т.4. $\Delta y=f(x^{(0)}+\Delta x)-f(x^{(0)}) = f(x_1^{(0)}+\Delta x_1,\dots,x_n^{(0)}+\Delta x_n)-f(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})=$

$$=\sum_{i=1}^n\left[f(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+\Delta x_i,\dots,x_n^{(0)}+\Delta x_n)-f(x_1^{(0)},\dots,x_i^{(0)},x_{i+1}^{(0)}+\Delta x_{i+1},\dots,x_n^{(0)}+\Delta x_n)\right]=$$

$$\underset{0<\theta_i<1}{=}(\text{Т. Л.})=\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+\theta_i\Delta x_i,x_{i+1}^{(0)}+\Delta x_{i+1},\dots,x_n^{(0)}+\Delta x_n)\cdot\Delta x_i=$$

$=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\cdot\Delta x_i+\alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)=\sum_{i=1}^n\alpha_i(\Delta x)\cdot\Delta x_i$,

$$\alpha_i(\Delta x)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)},\dots,x_{i-1}^{(0)},x_i^{(0)}+\theta_i\Delta x_i,x_{i+1}^{(0)}+\Delta x_{i+1},\dots,x_n^{(0)}+\Delta x_n)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$$

$\lim\limits_{\Delta x\to\theta_n}\alpha_i(\Delta x)=0$ из-за непр., $|\Delta x_i|\le\|\Delta x\|\Rightarrow|\alpha(\Delta x)|\le$

$$\le\sum_{i=1}^n|\alpha_i(\Delta x)|\cdot|\Delta x_i|\le\|\Delta x\|\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^n|\alpha_i(\Delta x)|}_{\to 0}=\overline{\overline{o}}(\|\Delta x\|)$$

Теор. д-зана