

Производные и дифференциалы

Опр. $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ опред. в окр. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.

Её частной пр-й при $x = x^{(0)}$ (в точке $x^{(0)}$) по аргументу

x_i ($i = 1, \dots, n$) называется предел (если \exists):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \equiv \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i}$$

Другое обозначение $f'_{x_i}(x^{(0)})$. Аналогично $n=1$ можно рассмотреть $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Big|_{\text{пр}}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Big|_{\text{лев}}$; а также случаи, когда эти производные можно приписать бескон. значений.

Производные и дифференциалы

Опр. $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ опред. в окр. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.

Её частной пр-й при $x = x^{(0)}$ (в точке $x^{(0)}$) по аргументу

x_i ($i = 1, \dots, n$) называется приведен (если \exists):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \equiv \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i}$$

Другое обозначение $f'_{x_i}(x^{(0)})$. Аналогично $n = 1$ можно рассмотреть $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Big|_{\text{пр}}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \Big|_{\text{лев}}$; а также случаи, когда этим производным можно приписать бескон. значение.

Если $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ существует не только при $x = x^{(0)}$, но и в окр-сти, то у

неё тоже можно рассмотреть производные:

2-ые: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^{(0)}) \equiv \frac{\partial u}{\partial x_j}(x^{(0)})$, где $u(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$;

3-и: $\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x^{(0)}) \equiv \frac{\partial v}{\partial x_k}(x^{(0)})$, где $v(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$; и т.д.

Производные и дифференциалы

Опр. $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ опред. в окр. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.

Её частной пр-й при $x = x^{(0)}$ (в точке $x^{(0)}$) по аргументу

x_i ($i = 1, \dots, n$) называется приведен (если \exists):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i}$$

Другое обозначение $f'_{x_i}(x^{(0)})$. Аналогично $n=1$ можно рассмотреть $\left. \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \right|_{\text{пр}}$, $\left. \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \right|_{\text{лев}}$; а также случаи, когда эти производные можно приписать бескон. значений.

Если $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ существ. не только при $x = x^{(0)}$, но и в окр-сти, то у

ней тоже можно рассмотреть производные:

2-е: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^{(0)}) \equiv \frac{\partial u}{\partial x_j}(x^{(0)})$, где $u(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$;

3-е: $\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x^{(0)}) \equiv \frac{\partial v}{\partial x_k}(x^{(0)})$, где $v(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$; и т.д.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x^{(0)})$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) \equiv \frac{\partial w}{\partial x_i}(x^{(0)})$, где $w(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$

Эти пр-ые не всегда равны. Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + x \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right] = \\ &= y \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right], \quad (x, y) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

В частности, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y, y \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0, \text{ т.е. } \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y \quad \forall y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right] = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1$$

Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right], (x, y) \neq (0, 0)$,

т.е. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x (x \neq 0)$; но $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x \quad \forall x. \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right] = 1$$

Производные и дифференциалы

Опр. $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ опред. в окр. $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.

Её частной пр-й при $x = x^{(0)}$ (в точке $x^{(0)}$) по аргументу x_i ($i = 1, \dots, n$) называется предел (если \exists):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \equiv \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i}$$

Другое обозначение $f'_{x_i}(x^{(0)})$. Аналогично $n=1$ можно рассмотреть $\left. \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \right|_{\text{пр}}$, $\left. \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \right|_{\text{лев}}$; а также случаи, когда этим производным можно приписать бескон. значение.

Если $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ существ. не только при $x = x^{(0)}$, но и в окр-сти, то у

неё тоже можно рассмотреть производные:

2-е: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x^{(0)}) \equiv \frac{\partial u}{\partial x_j}(x^{(0)})$, где $u(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$;

3-е: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x^{(0)}) \equiv \frac{\partial v}{\partial x_k}(x^{(0)})$, где $v(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$; и т.д.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^{(0)})$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) \equiv \frac{\partial w}{\partial x_i}(x^{(0)})$, где $w(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$

Т1. $f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$, где $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$;

примен $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ непер. при $x = x^{(0)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^{(0)})$.

$W = g_1(x_i^{(0)} + \Delta x_i) - g_1(x_i^{(0)}) = g_2(x_j^{(0)} + \Delta x_j) - g_2(x_j^{(0)}) \Rightarrow$ (Т.Лагранжа) $\Rightarrow g'_1(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i) \cdot \Delta x_i = g'_2(x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j) \cdot \Delta x_j$;

Но $g'_1(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i, x_j^{(0)} + \Delta x_j) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i, x_j^{(0)}) =$ (Т.Л.) $= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i, x_j^{(0)} + \theta_3 \Delta x_j) \cdot \Delta x_j$. Аналогично

$g'_2(x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j}(x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_i^{(0)}, x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j) =$ (Т.Л.) $= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_i^{(0)} + \theta_4 \Delta x_i, x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j) \cdot \Delta x_i$. \Rightarrow

$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_i^{(0)} + \theta_1 \Delta x_i, x_j^{(0)} + \theta_3 \Delta x_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_i^{(0)} + \theta_4 \Delta x_i, x_j^{(0)} + \theta_2 \Delta x_j)$, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \in (0, 1)$

$x \rightarrow x^{(0)}$, т.к. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(x)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ непер. при $x = x^{(0)} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)})$. Т.Доказана.

Эти пр-е не всегда равны. Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + x \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right] =$$

$$= y \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right], (x, y) \neq (0, 0)$$

В частности, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y, y \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = 0$, т.е. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = -y \forall y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right] = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1$

Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right], (x, y) \neq (0, 0)$,

т.е. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x (x \neq 0)$; но $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x \forall x$. $\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right] = 1$

2-во т1. Будем писать только x_i и x_j . Другие аргументы, равные $x_k^{(0)}$ ($k \neq i, k \neq j$) не пишем.

$W = f(x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_j^{(0)} + \Delta x_j) - f(x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_j^{(0)}) - f(x_i^{(0)}, x_j^{(0)} + \Delta x_j) + f(x_i^{(0)}, x_j^{(0)})$

$g_1(x_i) = f(x_i, x_j^{(0)} + \Delta x_j) - f(x_i, x_j^{(0)})$ в окр. $x_i^{(0)}$
 $g_2(x_j) = f(x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_j) - f(x_i^{(0)}, x_j)$ в окр. $x_j^{(0)}$

Опр. $f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{E}_n: \|\omega\| = 1$.

Производной $f(x)$ при $x = x^{(0)}$ в направлении ω назыв. (если \exists):

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) \equiv \lim_{t \rightarrow 0 \pm 0} \frac{f(x^{(0)} + t\omega) - f(x^{(0)})}{t}$$

Опр. $f(x)$ определ. в окр. $x^{(0)}$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in E_n: \|\omega\| = 1$.

Производной $f(x)$ при $x = x^{(0)}$ в направлении ω назыв. (если \exists):

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) \equiv \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(x^{(0)} + t\omega) - f(x^{(0)})}{t}$$

i -е место \downarrow

$$\omega = e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + t, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x^{(0)})}{t}$$
$$= \left. \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \right|_{np}; \quad \omega = -e_i \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} - t, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x^{(0)})}{t}$$

$$= (-t = \Delta x_i) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0-0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x^{(0)})}{-\Delta x_i} = - \left. \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \right|_{ne\phi}$$

Опр. $f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in E_n: \|\omega\| = 1$.

Производной $f(x)$ при $x = x^{(0)}$ в направлении ω назыв. (если \exists):

$$\frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) \equiv \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(x^{(0)} + t\omega) - f(x^{(0)})}{t}$$

i -е место \rightarrow

$$\omega = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + t, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x^{(0)})}{t}$$

$$= \left. \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \right|_{\text{пр}}; \quad \omega = -e_i \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \omega}(x^{(0)}) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} - t, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x^{(0)})}{t}$$

$$= (-t = \Delta x_i) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0-0} \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x^{(0)})}{-\Delta x_i} = - \left. \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \right|_{\text{леф}}$$

Связи произв. с непрер. кр. Примеры в E_2 .

$$1. \quad f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Вращение графика} \\ \varphi(x) = x \sin \frac{1}{x} \\ \text{вокруг } OZ \end{array} \right)$$

$f(x, y)$ непрер. $\forall (x, y) \in E_2$. $(x, y) = (0, 0) \Rightarrow$ непрер. как элемент. φ - δ

а если $(x, y) = (0, 0)$, то $|f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, т.е. $-\sqrt{x^2 + y^2} \leq f(x, y) \leq \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

$$\forall \omega \in E_2: \|\omega\| = 1, \text{ т.е. } \omega = (\cos \alpha, \sin \alpha) \Rightarrow \frac{f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) - f(0, 0)}{t} = \frac{t \sin \frac{1}{t}}{t} = \sin \frac{1}{t}$$

$$= \sin \frac{1}{t}, \text{ т.е. } \forall \alpha \exists \frac{\partial f}{\partial \omega}(0, 0), \text{ т.к. } \exists \lim_{t \rightarrow 0+0} \sin \frac{1}{t}$$

$$2. f(x, y) = \begin{cases} 1, & y = x^2, x \neq 0 \\ 0 & \text{в ост. точках} \end{cases}$$



Эта ф-я разрывна в любой точке $y = x^2$,
однако $\forall \omega = (\cos \alpha, \sin \alpha) \frac{\partial f}{\partial \omega}(0, 0) = 0$ } - самость.

Опр. $y = f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$, Если приращ.

$\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{E}_n$, а $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$ при

$\|\Delta x\| \rightarrow 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$

(при $x = x^{(0)}$), а $(A, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$ — ед.

(полноты) дифференциала (1-го порядка)

$$dy = (A, \Delta x) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$$

Опр. $y = f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$, если приращ.

$\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{E}_n$, а $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$ при

$\|\Delta x\| \rightarrow 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$

(при $x = x^{(0)}$), а $(A, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n - \epsilon'$

(полнота) дифференциалом (1-го порядка)

$$dy = (A, \Delta x) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$$

x -незав. переи. $dx_i \equiv \Delta x_i$, $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$

$$dy = (A, dx) = \sum_{i=1}^n A_i dx_i = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$$

Опр. $y = f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$. Если прирав.

$\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{E}_n$, а $\alpha(\Delta x) = o(\|\Delta x\|)$ при $\|\Delta x\| \rightarrow 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$

(при $x = x^{(0)}$), а $(A, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$ - её

(полная) дифференциалом (1-го порядка)

$$dy = (A, \Delta x) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$$

x -изм. непр. $dx_i \equiv \Delta x_i$, $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$

$$dy = (A, dx) = \sum_{i=1}^n A_i dx_i = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$$

ТЗ $y = f(x)$ дифр. при $x = x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ непр. при $x = x^{(0)}$

Д-во т.2. $\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x) = o(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0$)

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1: \forall \Delta x, \|\Delta x\| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\|$.

$$\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} \Rightarrow \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2, 1) > 0: \forall x, \rho(x, x^{(0)}) < \delta,$$

т.е. $\|\Delta x\| = \|x - x^{(0)}\| = \rho(x, x^{(0)}) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| = |\Delta y| \leq |(A, \Delta x)| + |\alpha(\Delta x)| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\| \leq \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т.е. $f(x)$ непр. при $x = x^{(0)}$

Т.2-зона.

Опр. $y = f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$. Если приращ.

$\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A = (A_1, \dots, A_n) \in E_n$, а $\alpha(\Delta x) = o(\|\Delta x\|)$ при

$\|\Delta x\| \rightarrow 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$

(при $x = x^{(0)}$), а $(A, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n - e'$

(полная) дифференциалом (1-го порядка)

$$dy = (A, \Delta x) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$$

x -незав. переи. $dx_i \equiv \Delta x_i$, $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$

$$dy = (A, dx) = \sum_{i=1}^n A_i dx_i = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$$

ТЗ $y = f(x)$ дифф. при $x = x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ непр. при $x = x^{(0)}$.

Наличие всех частных производных при $x = x^{(0)}$ не гарантирует непрерывности при $x = x^{(0)}$ (см. пример 2)

Д-во т.2. $\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x) = o(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0$)

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1: \forall \Delta x, \|\Delta x\| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\|$.

$$\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} \Rightarrow \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2, 1) > 0: \forall x, \rho(x, x^{(0)}) < \delta,$$

т.е. $\|\Delta x\| = \|x - x^{(0)}\| = \rho(x, x^{(0)}) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| = |\Delta y| \leq$

$$\leq |(A, \Delta x)| + |\alpha(\Delta x)| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\| \leq \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ т.е. } f(x) \text{ непр. при } x = x^{(0)}$$

Т.2-завис.

Опр. $y = f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$. Если приравн.

$\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A = (A_1, \dots, A_n) \in E_n$, а $\alpha(\Delta x) = o(\|\Delta x\|)$ при

$\|\Delta x\| \rightarrow 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$

(при $x = x^{(0)}$), а $(A, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n - e\delta$

(полной) дифференциалом (1-го порядка)

$$dy = (A, \Delta x) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$$

x -незав. переи. $dx_i \equiv \Delta x_i$, $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$

$$dy = (A, dx) = \sum_{i=1}^n A_i dx_i = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$$

Т2 $y = f(x)$ диффр. при $x = x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ непрерывна при $x = x^{(0)}$.

Наличие всех частных пр-ых при $x = x^{(0)}$ не характеризует непрерывности при $x = x^{(0)}$ (см. пример 2)

Т3 $y = f(x)$ диффр. при $x = x^{(0)}$, $dy = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$

$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = A_i$

Д-во Т. 2. $\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x) = o(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0$)

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1: \forall \Delta x, \|\Delta x\| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\|$.

$\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} \Rightarrow \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2, 1) > 0: \forall x, \rho(x, x^{(0)}) < \delta$

т.е. $\|\Delta x\| = \|x - x^{(0)}\| = \rho(x, x^{(0)}) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| = |\Delta y|$

$\leq |(A, \Delta x)| + |\alpha(\Delta x)| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\| \leq \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)}$

$+ \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т.е. $f(x)$ непрерывна при $x = x^{(0)}$

Т. 2-завис.

Д-во Т. 3. $\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x) = o(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0$)

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall \Delta x, \|\Delta x\| < \delta \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\|$.

$\Delta x = (0, \dots, 0, \Delta x_i, 0, \dots, 0)$, $\|\Delta x\| = |\Delta x_i| \Rightarrow \forall \Delta x_i, 0 < |\Delta x_i| < \delta \Rightarrow$

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x_i} - A_i \right| = \left| \frac{f(x^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i} - A_i \right|$$

$$= \left| \frac{\Delta y}{\Delta x_i} - A_i \right| = \left| A_i + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x_i} - A_i \right| \leq \frac{\varepsilon \cdot \|\Delta x\|}{2 \cdot |\Delta x_i|} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

т.е. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = A_i$. Теорема доказана.

Опр. $y = f(x)$ определ. в окр. $x^{(0)}$. Если приращ.

$\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{E}_n$, а $\alpha(\Delta x) = o(\|\Delta x\|)$ при

$\|\Delta x\| \rightarrow 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$

(при $x = x^{(0)}$), а $(A, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$ - её

(полная) дифференциалом (1-го порядка)

$$dy = (A, \Delta x) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$$

x -незав. переи. $dx_i \equiv \Delta x_i$, $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$

$$dy = (A, dx) = \sum_{i=1}^n A_i dx_i = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$$

Т2 $y = f(x)$ диффр. при $x = x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ непрерыв. при $x = x^{(0)}$.

Наличие всех частных пр-ых при $x = x^{(0)}$ не гарантирует непрерывности при $x = x^{(0)}$ (см. пример 2)

Т3 $y = f(x)$ диффр. при $x = x^{(0)}$, $dy = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$

$$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = A_i$$

$$dy = \sum_{i=1}^n A_i dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Д-во т. 2. $\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x) = o(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0$)

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1: \forall \Delta x, \|\Delta x\| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\|$.

$$\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} \Rightarrow \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2, 1) > 0: \forall x, \rho(x, x^{(0)}) < \delta,$$

т.е. $\|\Delta x\| = \|x - x^{(0)}\| = \rho(x, x^{(0)}) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| = |\Delta y| \leq$

$$\leq |(A, \Delta x)| + |\alpha(\Delta x)| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\| \leq \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ т.е. } f(x) \text{ непрерыв. при } x = x^{(0)}$$

Т. 2-зона.

Д-во т. 3. $\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x) = o(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0$),

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall \Delta x, \|\Delta x\| < \delta \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\|$.

$\Delta x = (0, \dots, 0, \Delta x_i, 0, \dots, 0)$, $\|\Delta x\| = |\Delta x_i| \Rightarrow \forall \Delta x_i, 0 < |\Delta x_i| < \delta \Rightarrow$

$$\left| \frac{\Delta y}{\Delta x_i} - A_i \right| = \left| \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i} - A_i \right| =$$

$$= \left| \frac{\Delta y}{\Delta x_i} - A_i \right| = \left| \frac{A_i \Delta x_i + \alpha(\Delta x)}{\Delta x_i} - A_i \right| = \left| A_i + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x_i} - A_i \right| \leq \frac{\varepsilon \cdot \|\Delta x\|}{2 \cdot |\Delta x_i|} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т.е. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = A_i$. Теорема Даламбера.

Опр. $y = f(x)$ опред. в окр. $x^{(0)}$, если приращ.

$\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{E}_n$, а $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$ при

$\|\Delta x\| \rightarrow 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$

(при $x = x^{(0)}$), а $(A, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n - \text{её}$

(полная) дифференциалом (1-го порядка)

$$dy = (A, \Delta x) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$$

x -незав. переи. $dx_i \equiv \Delta x_i$, $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$

$$dy = (A, dx) = \sum_{i=1}^n A_i dx_i = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$$

Т2 $y = f(x)$ диффр. при $x = x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ конт. при $x = x^{(0)}$.

Наличие всех частных прирост при $x = x^{(0)}$ не гарантирует непрерывности при $x = x^{(0)}$ (см. пример 2)

Т3 $y = f(x)$ диффр. при $x = x^{(0)}$, $dy = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$

$$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = A_i$$

$$dy = \sum_{i=1}^n A_i dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Т4 $f(x)$ опр. в окр. $x^{(0)}$ и $\forall i = 1, \dots, n \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ в этой

окр., все $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ конт. при $x = x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ диффр. в $x^{(0)}$

Д-во т. 2. $\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0$)

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1: \forall \Delta x, \|\Delta x\| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\|$.

$\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} \Rightarrow \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2, 1) > 0: \forall x, \rho(x, x^{(0)}) < \delta$,

т.е. $\|\Delta x\| = \|x - x^{(0)}\| = \rho(x, x^{(0)}) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| = |\Delta y| \leq$

$$\leq |(A, \Delta x)| + |\alpha(\Delta x)| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\| \leq \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ т.е. } f(x) \text{ конт. при } x = x^{(0)}$$

Т. 2-зона

Д-во т. 3. $\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x) = \bar{o}(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0$),

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall \Delta x, \|\Delta x\| < \delta \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\|$.

$\Delta x = (0, \dots, 0, \Delta x_i, 0, \dots, 0)$, $\|\Delta x\| = |\Delta x_i| \Rightarrow \forall \Delta x_i, 0 < |\Delta x_i| < \delta \Rightarrow$

$$\left| \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i} - A_i \right| =$$

$$= \left| \frac{\Delta y}{\Delta x_i} - A_i \right| = \left| \frac{A_i \Delta x_i + \alpha(\Delta x)}{\Delta x_i} - A_i \right| = \left| A_i + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x_i} - A_i \right| \leq \frac{\varepsilon \cdot \|\Delta x\|}{2 \cdot |\Delta x_i|} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т.е. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = A_i$. Теорема Дарбуна.

Д-во т. 4. $\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) =$

$$= \sum_{i=1}^n \left[f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) \right]$$

$$= (\text{т. 1.}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \theta_i \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)} + \Delta x_{i+1}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) \cdot \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cdot \Delta x_i + \alpha(\Delta x), \text{ где } \alpha(\Delta x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\Delta x) \cdot \Delta x_i,$$

$$\alpha_i(\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \theta_i \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)} + \Delta x_{i+1}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha_i(\Delta x) = 0$ из-за конт., $|\Delta x_i| \leq \|\Delta x\| \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \leq$

$$\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i(\Delta x)| \cdot |\Delta x_i| \leq \|\Delta x\| \cdot \sum_{i=1}^n |\alpha_i(\Delta x)| = \bar{o}(\|\Delta x\|)$$

теор. 2-зона

Опр. $y = f(x)$ опр. в окр. $x^{(0)}$, если приращ.

$\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)})$ можно представить в виде

$$\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$$

где $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{E}_n$, а $\alpha(\Delta x) = o(\|\Delta x\|)$ при $\|\Delta x\| \rightarrow 0$, то $f(x)$ назыв. дифференцируемой в $x^{(0)}$ (при $x = x^{(0)}$), а $(A, \Delta x) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$ — ед.

(полноты) дифференциалом (1-го порядка)

$$dy = (A, \Delta x) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta x_i = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n$$

x -крат. переи. $dx_i \equiv \Delta x_i$, $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$

$$dy = (A, dx) = \sum_{i=1}^n A_i dx_i = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$$

Т2 $y = f(x)$ диффр. при $x = x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ кепр. при $x = x^{(0)}$.

Намные всех частных пр-ых при $x = x^{(0)}$ не характеризуют непрерывности при $x = x^{(0)}$ (см. пример 2)

Т3 $y = f(x)$ диффр. при $x = x^{(0)}$, $dy = A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n$

$$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = A_i$$

$$dy = \sum_{i=1}^n A_i dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Т4 $f(x)$ опр. в окр. $x^{(0)}$ $\forall i = 1, \dots, n \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ в этой

окр., все $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ кепр. при $x = x^{(0)} \Rightarrow f(x)$ диффр. в $x^{(0)}$.

Опр. $f(x) \in C_m$ в обл. $E \subset \mathbb{E}_n$, если все ед m -ые частные пр-ые кепр. в каждой точке E .

Сл. $f(x) \in C_1$ в обл. $E \Rightarrow f(x)$ диффр. $\forall x \in E$.

Д-во т. 2. $\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x) = o(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0$)

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1: \forall \Delta x, \|\Delta x\| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\|$.

$$\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} \Rightarrow \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2, 1) > 0: \forall x, \rho(x, x^{(0)}) < \delta,$$

т.е. $\|\Delta x\| = \|x - x^{(0)}\| = \rho(x, x^{(0)}) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x^{(0)})| = |\Delta y| \leq |(A, \Delta x)| + |\alpha(\Delta x)| \leq \|A\| \cdot \|\Delta x\| + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\| \leq \|A\| \cdot \frac{\varepsilon}{2(\|A\|+1)} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т.е. $f(x)$ кепр. при $x = x^{(0)}$.
Т. 2-го д-ва.

Д-во т. 3. $\Delta y = (A, \Delta x) + \alpha(\Delta x)$, $\alpha(\Delta x) = o(\|\Delta x\|)$ ($\|\Delta x\| \rightarrow 0$),

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall \Delta x, \|\Delta x\| < \delta \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta x\|$.

$\Delta x = (0, \dots, 0, \Delta x_i, 0, \dots, 0)$, $\|\Delta x\| = |\Delta x_i|$. $\Rightarrow \forall \Delta x_i, 0 < |\Delta x_i| < \delta \Rightarrow$

$$\left| \frac{f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_i} - A_i \right| = \left| \frac{\Delta y}{\Delta x_i} - A_i \right| = \left| \frac{A_i \Delta x_i + \alpha(\Delta x)}{\Delta x_i} - A_i \right| = \left| A_i + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x_i} - A_i \right| \leq \frac{\varepsilon \cdot \|\Delta x\|}{2 \cdot |\Delta x_i|} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

т.е. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = A_i$. Теорема Локкера.

Д-во т. 4. $\Delta y = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) =$

$$= \sum_{i=1}^n \left[f(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \Delta x_i, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_i^{(0)}, x_{i+1}^{(0)} + \Delta x_{i+1}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) \right]$$

$$= (\text{т. 1}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \theta_i \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)} + \Delta x_{i+1}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) \cdot \Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cdot \Delta x_i + \alpha(\Delta x), \text{ где } \alpha(\Delta x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\Delta x) \cdot \Delta x_i,$$

$$\alpha_i(\Delta x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}, x_i^{(0)} + \theta_i \Delta x_i, x_{i+1}^{(0)} + \Delta x_{i+1}, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$$

$\lim_{\Delta x \rightarrow \theta_n} \alpha_i(\Delta x) = 0$ из-за кепр., $|\Delta x_i| \leq \|\Delta x\| \Rightarrow |\alpha(\Delta x)| \leq$

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i(\Delta x)| \cdot |\Delta x_i| \leq \|\Delta x\| \cdot \sum_{i=1}^n |\alpha_i(\Delta x)| = o(\|\Delta x\|)$$

теор. 2-го д-ва