

Дифференциальные уравнения

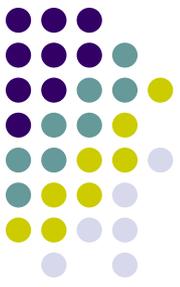
Дифференциальные уравнения



Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные различных порядков по x .

Общий вид дифференциального уравнения n -го порядка:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$



Решаем
дифференциальное
уравнение:

$$4 y(x) + x y'(x) = 5 x + x^2$$

$$\frac{4 y(x)}{x} + y'(x) = \frac{5 x + x^2}{x}$$

Порядок дифференциального уравнения



Порядок старшей производной, входящей в данное дифференциальное уравнение, называется **порядком** этого уравнения.

Примеры.

Первый порядок $y' = xy$

Второй порядок $y'' + 2y' + y = 0$

Третий порядок $y''' = e^{2x}$

Линейное дифференциальное уравнение



Дифференциальное уравнение называется **линейным**, если его левая часть является многочленом от неизвестной функции и ее производных различных порядков, то есть имеет общий вид:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)$$

Кoeffициенты
линейного
уравнения

Правая часть,
свободный
член

Пример Найти общий интеграл уравнения $(2x - y^2)y' = 2y$,
 $y' = \frac{dy}{dx}$.

► Данное уравнение является линейным относительно функции $x(y)$. Действительно,

$$(2x - y^2) \frac{dy}{dx} = 2y, \quad 2x - y^2 = 2y \frac{dx}{dy}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{2},$$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = -\frac{y}{2}, \quad p(y) = -\frac{1}{y}, \quad q(y) = -\frac{y}{2},$$

т. е. получили уравнение вида $x' + p(y)x = q(y)$. Согласно формуле общее решение исходного уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} x &= e^{\int \frac{dy}{y}} \left(-\int \frac{y}{2} e^{-\int \frac{dy}{y}} dy + C \right) = e^{\ln |y|} \left(-\int \frac{y}{2} e^{-\ln |y|} dy + C \right) = \\ &= |y| \left(-\frac{1}{2} \int \frac{y}{|y|} dy + C \right) = -\frac{y}{2} \int dy + Cy = Cy - \frac{1}{2} y^2. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Однородное дифференциальное уравнение



Дифференциальное уравнение называется **однородным**, если его правая часть равна нулю. В противном случае оно называется **неоднородным**.

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

Кoeffициенты
линейного
уравнения

Правая часть
равна нулю.

Пример Проинтегрировать дифференциальное уравнение $2x^2y' = x^2 + y^2$ и найти его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

► Так как функции $2x^2$ и $x^2 + y^2$ — однородные второго измерения, то данное уравнение — однородное. Сделаем замену $y = xu$, $y' = u + xu'$. Тогда

$$2x^2(u + xu') = x^2 + (xu)^2, \quad 2x^2(u + xu') = x^2(1 + u^2).$$

Предполагая, что $x \neq 0$, сокращаем обе части уравнения на x^2 . Далее имеем:

$$2u + 2x \frac{du}{dx} = 1 + u^2, \quad 2xdu = (1 + u^2 - 2u)dx.$$

Разделяя переменные, последовательно находим:

$$\frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \frac{dx}{2x},$$

$$\int \frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \int \frac{dx}{2x}, \quad \int \frac{d(u-1)}{(u-1)^2} = \frac{1}{2} \ln |x|,$$

$$-\frac{1}{u-1} = \frac{1}{2} \ln |x| + \ln C, \quad 1 = (1-u) \ln (C \sqrt{|x|}).$$



В последнее выражение вместо u подставим значение y/x .
Получим общий интеграл

$$1 = \left(1 - \frac{y}{x}\right) \ln(C\sqrt{|x|}), \quad x = (x - y) \ln(C\sqrt{|x|}).$$

Разрешив его относительно y , найдем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = x - \frac{x}{\ln(C\sqrt{|x|})}.$$

Используя начальное условие $y(1) = 0$, определим значение C :

$$0 = 1 - \frac{1}{\ln C}, \quad \ln C = 1, \quad C = e.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y = x - \frac{x}{1 + \ln \sqrt{|x|}}. \quad \blacktriangleleft$$

Решение дифференциального уравнения



Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая после подстановки в уравнение обращает его в тождество относительно x .

Решить, или **проинтегрировать**, данное дифференциальное уравнение – означает найти все его решения в заданной области.

График решения называется **интегральной кривой**.

Общее и частное решения



Общим решением дифференциального уравнения называется решение, которое содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок этого уравнения:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Частным решением дифференциального уравнения называется всякое решение, которое получается из общего, если приписать входящим в него произвольным постоянным определенные значения.

Пример



Дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + y = 0$$

Легко сообразить, что $\sin x$ и $\cos x$ являются решениями.

Общее решение:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Частное решение:

$$y = 2 \sin x - 5 \cos x$$

Проверка решений



Если в результате решения некоторого дифференциального уравнения найдена некоторая функция, то подставив эту функцию в уравнение, можно проверить правильность решения.

Пример. Функция: $y = (C_1 + C_2x)e^x$ есть решение
уравнения:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Проверка.

$$\begin{aligned} y' &= (C_1 + C_2 + C_2x)e^x \\ y'' &= (C_1 + 2C_2 + C_2x)e^x \end{aligned} \Rightarrow y'' - 2y' + y = 0$$

Пример Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(xy + y)dx + (xy + x)dy = 0.$$

► Предположив, что $x \neq 0$, $y \neq 0$ и разделив обе части данного уравнения на xy , получим уравнение с разделенными переменными:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(1 + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Интегрируя его, согласно формуле $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$ последовательно находим (произвольную постоянную можно представить в виде $\ln |C|$):

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx + \int \left(1 + \frac{1}{y}\right)dy = \ln |C|,$$

$$x + \ln |x| + y + \ln |y| = \ln |C|,$$

$$\ln |xy| + \ln e^{x+y} = \ln |C|, \quad xye^{x+y} = C.$$

Последнее равенство является общим интегралом уравнения. При его нахождении были приняты ограничения $x \neq 0$, $y \neq 0$. Однако функции $x = 0$ и $y = 0$ также являются решениями исходного уравнения, что легко проверяется; с другой стороны, они получаются из общего интеграла при $C = 0$. Следовательно, $x = 0$, $y = 0$ — частные решения уравнения

Пример Найти частное решение уравнения

$$(1 + e^{2x})y^2 y' = e^x,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

► Запишем данное уравнение в дифференциальной форме формулу :

$$(1 + e^{2x})y^2 dy - e^x dx = 0.$$

Теперь разделим переменные:

$$y^2 dy - \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = 0.$$

Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int y^2 dy - \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \frac{C}{3}, \quad \frac{y^3}{3} - \operatorname{arctg} e^x = \frac{C}{3},$$
$$y = \sqrt[3]{C + 3 \operatorname{arctg} e^x}.$$

Получили общее решение исходного уравнения.

Используя начальные условия, определим значение произвольной постоянной:

$$1 = \sqrt[3]{C + \frac{3}{4} \pi}, \quad C = 1 - \frac{3}{4} \pi.$$

Следовательно, частное решение исходного уравнения имеет вид

$$y = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{4} \pi + 3 \operatorname{arctg} e^x}. \quad \blacktriangleleft$$

Уравнение первого порядка



Уравнение, связывающее между собой независимую переменную x , искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется **дифференциальным уравнением первого порядка**:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если уравнение **разрешено относительно производной**, то оно имеет вид:

$$y' = f(x, y)$$



Пример Доказать, что функция $y = y(x)$, заданная в неявном виде: $F(x, y) \equiv \ln \frac{y}{x} - 5 + xy = 0$, обращает дифференциальное уравнение $(x + x^2y)y' = y - xy^2$ в тождество, т. е. является его решением.

► Действительно, согласно правилу дифференцирования неявной функции $F(x, y) = 0$

$$y' = - \frac{F'_x}{F'_y} = - \left(y - \frac{1}{x} \right) / \left(x + \frac{1}{y} \right) = \frac{y}{x} \frac{1 - xy}{1 + xy} = \frac{1 - xy^2}{x + x^2y}.$$

Подставив найденную производную y' в исходное дифференциальное уравнение, получим тождество. ◀

Постановка задачи Коши



Задача нахождения решения дифференциального уравнения:

$$y' = f(x, y)$$

удовлетворяющего **начальному условию**:

$$y(x_0) = y_0$$

где x_0 и y_0 - заданные числа, называется **задачей Коши** для уравнения первого порядка.

Геометрический смысл

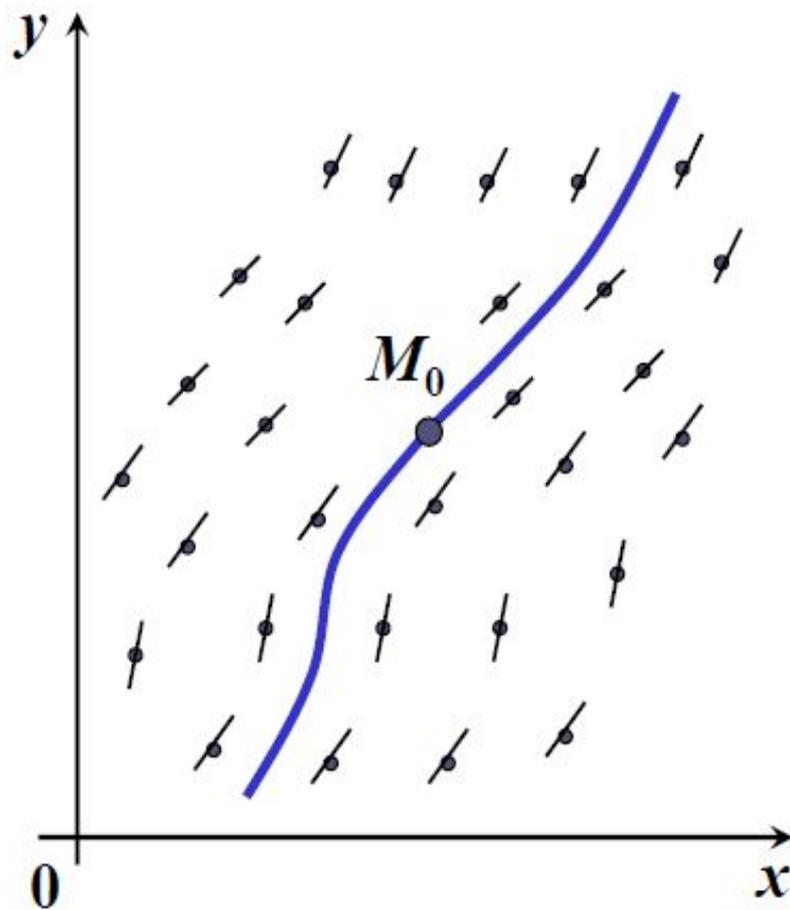


Решить задачу Коши

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

означает **найти интегральную кривую** дифференциального уравнения, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.



Пример Найти общее решение уравнения $(x^2 - x)y' + y = x^2(2x - 1)$.

Решить задачу Коши при начальном условии $y(-2) = 2$.

► Приведем данное уравнение к виду $y' + \frac{y}{x^2 - x} = \frac{x^2(2x - 1)}{x^2 - x}$, разделив обе его части на $x^2 - x \neq 0$. Получим

$$y' + \frac{y}{x^2 - x} = \frac{x^2(2x - 1)}{x^2 - x}.$$

Здесь

$$P(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}, \quad Q(x) = \frac{x^2(2x - 1)}{x(x - 1)} = \frac{x(2x - 1)}{x - 1}.$$

Общее решение исходного уравнения в соответствии с формулой имеет вид

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x(x-1)}} \left(\int \frac{x(2x-1)}{x-1} e^{\int \frac{dx}{x(x-1)}} dx + C \right).$$

Найдем входящие в это решение интегралы. Имеем:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)} = \left| \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)}, \quad A = -1, \quad B = 1 \right| = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx = -\ln|x| + \ln|x-1| = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right|,$$

$$\int \frac{x(2x-1)}{x-1} e^{\ln \left| \frac{x-1}{x} \right|} dx = \int \frac{x(2x-1)}{x-1} \left| \frac{x-1}{x} \right| dx = \pm \int (2x-1) dx = \pm (x^2 - x),$$



где знаки «+» и «-» появляются в силу равенства $\left| \frac{x-1}{x} \right| = \pm \frac{x-1}{x}$.

Подставляя найденные интегралы в решение окончательно получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = e^{-\ln \left| \frac{x-1}{x} \right|} (\pm (x^2 - x) + C) = \left| \frac{x}{x-1} \right| (\pm (x^2 - x) + C) = \\ = \pm \frac{x}{x-1} (\pm x(x-1) + C) = x^2 + \frac{Cx}{x-1}.$$

Из него выделяем частное решение, соответствующее начальному условию $y(-2) = 2$:

$$2 = 4 - \frac{2C}{-2-1}, \quad C = -3, \quad y = x^2 - \frac{3x}{x-1}. \quad \blacktriangleleft$$

Уравнение с разделяющимися переменными



Дифференциальное уравнение, в котором путем преобразований переменные могут быть разделены, называется **дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными**.

Его можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

или

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

Пример



Дифференциальное
уравнение

с

разделяющимися

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

Объяснение. Покажем, как можно разделить переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1} \cdot y$$

$f(x) \cdot g(y)$

Пример



Требуется найти решение дифференциального уравнения:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$y(2) = 6$$

Решение



1. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1} \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$$

2. Теперь интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$$

Решение



3. Получаем:

$$\ln|y| = \ln|x + 1| + \ln|C| = \ln|C(x + 1)|$$

$$y = C(x + 1)$$

4. По начальному условию определяем значение константы:

$$6 = C(2 + 1) \quad \longrightarrow \quad C = 2$$

Ответ. Решение дифференциального уравнения:

$$y = 2(x + 1)$$

Проверка



Действительно ли уравнение:

$$y' = \frac{y}{x+1}$$

имеет в качестве решения функцию:

$$y = 2(x+1)$$

Проверка.

$$y' = (2(x+1))' = 2 = \frac{2(x+1)}{x+1}$$

Однородное и неоднородное уравнения



Если функция $g(x)$ тождественно равна нулю, уравнение называется **однородным**, в противном – **неоднородным**.

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

Однородное уравнение

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Неоднородное уравнение

Линейное однородное уравнение решается методом разделения переменных. Линейное неоднородное уравнение решается методом вариации постоянных.

Пример



Решить линейное однородное уравнение:

$$y' + x^2 \cdot y = 0$$

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 \cdot y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -x^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\frac{x^3}{3} + \ln|C| \Rightarrow y = Ce^{-\frac{x^3}{3}}$$

Проверьте ответ!

Метод вариации постоянной



1. В методе вариации постоянной сначала находится решение однородного уравнения:

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

2. Затем полагают постоянную C новой неизвестной функцией от x : $C = C(x)$ и находят общее решение неоднородного уравнения:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

Пример



Решить линейное неоднородное уравнение:

$$xy' - 2y = 2x^2$$

Решение. 1. Поделим на x :

$$y' - 2\frac{y}{x} = 2x$$

2. Решаем однородное уравнение:

$$y' - 2\frac{y}{x} = 0$$

Решение



3. Разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

4. Интегрируем:

$$\ln|y| = 2 \ln|x| + \ln|C| = \ln Cx^2$$

$$y = Cx^2$$

5. Полагаем постоянную новой неизвестной функцией:

$$y = C(x) \cdot x^2$$

Решение



6. Подставляем в уравнение в п.1. и получим:

$$C'(x) \cdot x^2 = 2x^2$$

7. Отсюда находим $C(x)$:

$$C(x) = 2x + C_1$$

8. **Ответ.** Получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = (2x + C_1) \cdot x^2$$

Пример Проинтегрировать уравнение

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

методом Бернулли и решить задачу Коши при начальном условии $y(\pi) = 1$.

► Сделав подстановку Бернулли $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, получим:

$$u'v + uv' + uv \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad (v' + v \operatorname{tg} x)u + u'v = \frac{1}{\cos x}.$$

Находим частное решение уравнения $v' + v \operatorname{tg} x = 0$:

$$dv + v \operatorname{tg} x dx = 0, \quad \frac{dv}{v} + \operatorname{tg} x dx = 0,$$

$$\int \frac{dv}{v} + \int \operatorname{tg} x dx = 0, \quad \ln |v| - \ln |\cos x| = \ln C_1.$$

Полагая $C_1 = 1$, выбираем частное решение $v = \cos x$. Далее ищем общее решение уравнения $u'v = 1/\cos x$, где $v = \cos x$. Имеем:

$$u' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad u = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + C = \operatorname{tg} x + C.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = uv = (\operatorname{tg} x + C) \cos x.$$



Из него выделяем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(\pi) = 1$: $1 = (0 + C)(-1)$, откуда $C = -1$. Подставляя значение $C = -1$ в общее решение, получаем частное решение исходного уравнения:

$$y = (\operatorname{tg} x - 1) \cos x = \sin x - \cos x. \blacktriangleleft$$



Пример Найти общее решение уравнения Бернулли $y' + 2e^x y = 2e^x \sqrt{y}$.

► Так как для данного уравнения $\alpha = 1/2$, можно сделать замену $z = y^{1-\alpha} = \sqrt{y}$. Согласно уравнению получим уравнение $z' + e^x z = e^x$, общее решение которого в соответствии имеет вид

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int e^x dx} \left(\int e^x e^{\int e^x dx} dx + C \right) = \\ &= e^{-e^x} \left(\int e^x e^{e^x} dx + C \right) = e^{-e^x} \left(\int e^{e^x} de^x + C \right) = \\ &= e^{-e^x} (e^{e^x} + C) = 1 + Ce^{-e^x}. \end{aligned}$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = z^2 = (1 + Ce^{-e^x})^2. \blacktriangleleft$$

Пример. Найти общий интеграл уравнения $(x^2 + y - 4)dx + (x + y + e^y)dy = 0$.

► Введем обозначения $P = x^2 + y - 4$, $Q = x + y + e^y$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, т. е. условие выполнено, то данное уравнение

является уравнением в полных дифференциалах. Его общий интеграл можно найти по формуле или положив для простоты $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Выбор этих значений x_0 , y_0 допустим, так как функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и их частные производные определены, т. е. точка $M_0(0, 0) \in D$. По формуле имеем

$$\int_0^x (x^2 + 0 - 4)dx + \int_0^y (x + y + e^y)dy = C,$$

$$\frac{x^3}{3} - 4x + xy + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C.$$

По формуле получаем общий интеграл:

$$\int_0^x (x^2 + y - 4)dx + \int_0^y (0 + y + e^y)dy = C,$$

$$\frac{x^3}{3} + xy - 4x + \frac{y^2}{2} + e^y - 1 = C,$$

который совпадает с уже найденным. ◀

Самостоятельная работа

1. 1. Является ли функция $y = Cx + 1/C$ решением дифференциального уравнения $xy' - y + 1/y = 0$? (Ответ: нет.)

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $4(x^2y + y)dy + \sqrt{5 + y^2}dx = 0$. (Ответ: $y = \pm \frac{1}{16}(C - \operatorname{arctg} x)^2 - 5$.)

3. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$, $y(2) = \pi$. (Ответ: $y = 2x \operatorname{arctg}(x/2)$.)

2. 1. Является ли функция $y = y(x)$, заданная неявно уравнением $e^{y/x} = Cy$, интегралом дифференциального уравнения $xyy' - y^2 = x^2y'$? (Ответ: да.)