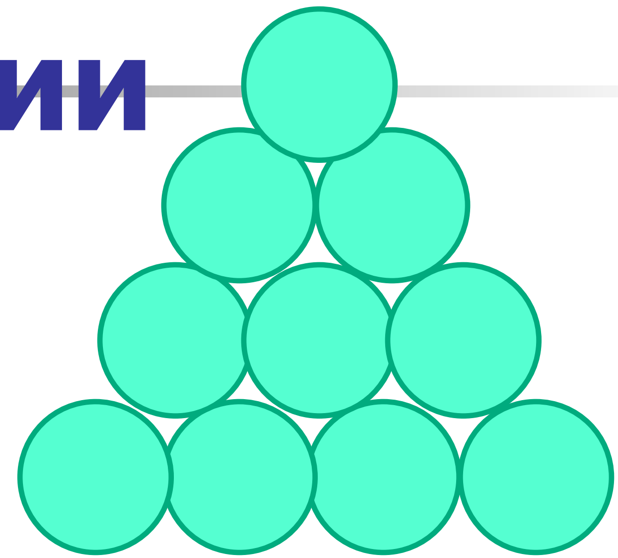
20.04.
Сумма n первых членов арифметической прогрессии



Карл Гаусс
(1777 – 1855)

выдающийся немецкий математик, астроном и физик, считается одним из величайших математиков всех времён.

«Король математики»

Математический талант Гаусса проявился ещё в детстве. По легенде, школьный учитель математики, чтобы занять детей на долгое время, предложил им сосчитать сумму чисел от 1 до 100. Юный Гаусс быстро вычислил.

Вычислите: $\underline{1} + \underline{2} + \underline{3} + \underline{4} + \ldots + \underline{97} + \underline{98} + \underline{99} + \underline{100} = 101 * 50 = 5\,050$

Найти сумму первых 100 натуральных чисел

S – сумма

S= 1 + 2 +3+…+98+99+100

S=100+99+98+…+ 3 + 2 + 1

2S=101*100 |:2

$$S = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$$

S=1+2+3+…+98+99+100=5050

Найти сумму первых 10 натуральных чисел.

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=$$

$$= \frac{1 + 10}{2} \cdot 10 = 55$$

S_n – сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$+\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_2 + a_1 \end{array}$$

$$a_1 + a_n$$

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$$

$$a_4 + a_{n-3} = (a_3 + d) + (a_{n-2} - d) = a_3 + a_{n-2} = a_1 + a_n$$

$$a_i + a_{n-(i-1)} = (a_1 + \underline{(i-1)d}) +$$

$$+(a_1 + (n \underline{- (i-1)} - 1)\underline{d}) = a_1 + (a_1 + (n-1)d) =$$

$$= a_1 + a_n$$

$$
\begin{array}{l}
S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\
+\;\; S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_2 + a_1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \;\Big|\; : 2$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

Найдите сумму первых сорока членов последовательности, заданной формулой:

$$a_n = 5n - 4$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Решение

Данная последовательность вида $a_n = k\,n + b$, значит, это арифметическая прогрессия

$$S_{40} = \frac{a_1 + a_{40}}{2} \cdot 40$$

$$a_1 = 5 \cdot 1 - 4 = 1$$

$$a_{40} = 196$$

$$S_{40} = \frac{(1 + 196) \cdot 40}{2} = 3940$$

Найдём сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии

4; 5,5;…

Решение

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n \qquad S_{30} = \frac{2a_1 + 29d}{2} \cdot 30$$

$a_1 = 4$, d $= a_2 - a_1 = 1{,}5$

$$S_{30} = \frac{2 \cdot 4 + 29 \cdot 1{,}5}{2} \cdot 30 = 772{,}5$$

Ответ: 772,5

Задача (ОГЭ) .

Найдите сумму всех натуральных чисел, не превосходящих 150, которые не делятся на 5.

Решение

S – искомая сумма; $S = S_1 - S_2$,

$$S = S_1 - S_2 = 151 \cdot 75 - 155 \cdot 15 =$$

где S_1 – сумма всех нату… …исел, …сходящих 150,

S_2 – сумма всех натуральных …ых 5 и не превосходящих 150.

$$= 75\,(151 - 31) = 75 \cdot 120 = 9\,000$$

1; 2; 3; … 150 – арифметическая прогрессия

$$S_1 = \frac{a_1 + a_{150}}{2} \cdot 150 = \frac{1 + 150}{2} \cdot 150 = 151 \cdot 75$$

Ответ: 9 000

5; 10; … 150 – арифметическая прогрессия $b_1 = 5$;

$b_n = 150$; $d = 5$; $b_n = 5n$; $5n = 150$; $n = 30$

$$S_2 = \frac{b_1 + b_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{5 + 150}{2} \cdot 30 = 155 \cdot 15$$

Задача. Укажите наибольшее число членов арифметической прогрессии – 42; – 38; – 34; …, сумма которых меньше 150.

Решение.

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

$$a_1 = -42, \quad d = a_2 - a_1 = 4$$

$$S_n < 150 \qquad \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n < 150$$

$$\frac{2 \cdot (-42) + (n-1)4}{2} \cdot n < 150$$

$$(-42 + 2n - 2)n < 150 \,\Big|\, : 2$$

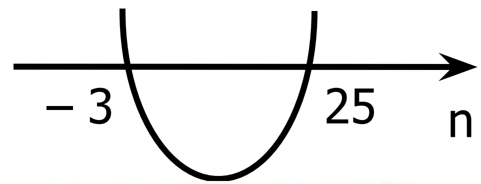
$$(-22 + n)n < 75$$

$$n^2 - 22n - 75 < 0$$

$$y = n^2 - 22n - 75$$

$$y = 0; \quad n^2 - 22n - 75 = 0$$

n = 25 или n = – 3



$$n \in (-3; 25)$$

n – натуральное число, поэтому

n = 1; 2; 3; … ; 24.

Наибольшее число – 24

Ответ: 24

Спасибо за урок

Желаем успехов в учёбе!