Оценка сложных систем в условиях стохастической неопределенности

Лекция 10

Учебные вопросы:

10.1 Принятие решений в условиях риска

10.2 Принятие решений на основе функции полезности

Литература:

1 **Анфилатов, В.С**. Системный анализ в управлении: Уч. пособие: /В. С. Анфилатов, А.А. Емельянов, А.А. Кукушкин. – М.: Финансы и статистика, 2006. - 109-130 с. – ISBN 5-279-02435-X

2 **Соловьев, Н.А.** Основы теории принятия решений для программистов: учебное пособие: /Н.А. Соловьев, Е.Н. Чернопрудова, Д. А. Лесовой – Оренбург: ООО ИПК «Университет», 2012. – С. 32-47. ISBN 978-5-4417-0092-4.

10.1 Принятие решений в условиях риска

Основные понятия теории рисков

Риск — предполагаемое событие, способное принести **ущерб или убыток.**

Принятие решений в условиях риска предполагает, что каждой альтернативе a_i, соответствует свое распределение вероятностей на множестве исходов y_j.

Матрица решений

A	Z				
	z_1		z_j		z_n
a_1	y_{11}		y_{1j}		y_{1n}
.					
a_i	y_{i1}		y_{ij}		$y_{i\,n}$
a_m	y_{mj}		y_{mj}		y_{mn}

Матрица решений интерпретируется следующим образом – решение a_i может реализовать различные исходы из соответствующей строки матрицы: $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{im}$. Какой именно исход реализуется, зависит от значения **параметра неопределенности** z, который может иметь различный содержательный смысл.

Принятие решений в условиях риска

Задачу принятия решений в условиях риска можно представить в форме функции риска

$$Y = F(a,z).$$

Каждому состоянию среды $\boldsymbol{z_j}$ соответствует вероятность его наступления $\boldsymbol{p(z_j)}$

$$p(z_j) = \prod_{i=1}^{n} p_i(y_j(a_i))$$

где $\boldsymbol{p_i(y_j(a_i))}$ – вероятность наступления исхода $\boldsymbol{y_j}$ при выборе альтернативы $\boldsymbol{a_i}$.

Тогда существует функционал ***K: Y×Z → R*** и задача принятия решений сводится задаче оптимизации

$$K(a,z) \to \underset{a \in A}{opt}$$

При многократно реализуемым исходам используется **МОЖ** критерия вида

$$K(a) = \overline{K(a,z)} = \underset{a \in A}{opt}$$

Задача о замене вратаря

Условие задачи. На последних минутах хоккейного матча при ничейном счете тренер должен принять решение о замене вратаря 6-м полевым игроком.

Имеется информация, что в аналогичных условиях предыдущих встреч замена вратаря в **1/6** части случаев привела к выигрышу, в половине (**1/2**) – к ничьей и в **1/3** – к поражению.

Если же вратарь не менялся, то в **7/8** случаев встреча заканчивалась в ничью, а в **1/8** части случаев команда проигрывала.

Решение

Цель (критерий) принятия решений - максимальное число ожидаемых очков.

Матрица решений (***a_1*** –вратаря сменить, ***a_2*** – вратаря не менять)

A	Z					
	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
a_1	***В***	***Н***	***П***	***В***	***Н***	***П***
a_2	***Н***	***Н***	***Н***	***П***	***П***	***П***

где В – выигрыш, приносящий 2 очка;
Н – ничья (1 очко);
П – поражение (0 очков).

Задача о замене вратаря (продолжение)

Расчет параметра неопределенности:

z_1: $a_1 \to$ В, $a_2 \to$ Н, $p(z_1) = 1/6 \times 7/8 = 7/48$

z_2: $a_1 \to$ Н, $a_2 \to$ Н, $p(z_2) = 1/2 \times 7/8 = 7/16$

z_3: $a_1 \to$ П, $a_2 \to$ Н, $p(z_3) = 1/3 \times 7/8 = 7/24$

z_4: $a_1 \to$ В, $a_2 \to$ П, $p(z_4) = 1/6 \times 1/8 = 1/48$

z_5: $a_1 \to$ Н, $a_2 \to$ П, $p(z_5) = 1/2 \times 1/8 = 1/16$

z_6: $a_1 \to$ П, $a_2 \to$ П, $p(z_6) = 1/3 \times 1/8 = 1/24$

Матрица рисков примет вид

A	*Z*					
	z_1(7/48)	z_2(7/16)	z_3(7/24)	z_4(1/48)	z_5(1/16)	z_6(1/24)
a_1	В(2)	Н(1)	П(0)	В(2)	Н(1)	П(0)
a_2	Н(1)	Н(1)	Н(1)	П(0)	П(0)	П(0)

$$\overline{K(a_1,z)} = 2\cdot(7/48) + 1\cdot(7/16) + 2\cdot(1/48) + 1\cdot(1/16) = 5/6$$

$$\overline{K(a_2,z)} = 1\cdot(7/48) + 1\cdot(7/16) + 1\cdot(1/24) = 7/8$$

$$\overline{K(a_2,z)} > \overline{K(a_1,z)}$$

Результат решения. Руководствуясь критерием числа ожидаемых очков, принимается решение вратаря не менять.

10.2 Принятие решений на основе функции полезности

Основные понятия теории полезности

Полезность – это действительное число, приписываемое исходу операции, которое характеризует его **предпочтительность** по сравнению с другими альтернативами относительно цели.

Доказано существование функции полезности, для которой предпочтения ЛПР формулируются в виде аксиом:

Аксиома 1 – **измеримость** (каждому альтернативному исходу $\boldsymbol{y_k}$ может быть поставлено неотрицательное действительное число $\boldsymbol{p_i}$, **($0 \le p_i \le 1$)**, рассматриваемое как мера относительной полезности исхода.

Аксиома 2 **– сравнимость** (любые два исхода (альтернативы) сравнимы: либо один исход предпочтительней другого, либо они эквивалентны).

Аксиома 3 **– транзитивность** (соотношения предпочтения исходов транзитивны, если исход $\boldsymbol{a_i}$ предпочтительнее $\boldsymbol{a_j}$, а исход $\boldsymbol{a_j}$ предпочтительнее $\boldsymbol{a_k}$, то исход $\boldsymbol{a_i}$ также предпочтительнее $\boldsymbol{a_k}$).

Аксиома 4 **– коммутативность** (предпочтение исхода $\boldsymbol{a_i}$ исходу $\boldsymbol{a_j}$ не зависит от порядка, в котором они представлены).

Аксиома 5 **– независимость (**если исход $\boldsymbol{a_i}$ предпочтительнее исхода $\boldsymbol{a_j}$ и, кроме того, существует исход $\boldsymbol{a_k}$, который не оценивается относительно исходов $\boldsymbol{a_i}$ и $\boldsymbol{a_j}$, то смесь исходов $\boldsymbol{a_i}$ и $\boldsymbol{a_k}$ предпочтительнее смеси исходов $\boldsymbol{a_j}$ и $\boldsymbol{a_k}$.

Функция полезности

Функция полезности представляет собой числовую функцию ***F(a),*** определенную на множестве альтернатив ***A={ai)*** так, что ***F(ai) = F(aj)***, когда альтернативы ***ai*** и ***aj*** неразличимы; ***F(ai) > F(aj)***, когда альтернатива ***ai*** предпочтительнее ***aj*** .

В вероятностных операций функция полезности носит случайный характер и определяется через ***F(y)*** – функцию полезности на множестве исходов ***y***, т.е. критерий выбора (решения) примет вид

$$K(a_i) = \max_{a_i} M_{a_i}\left[F(y)\right]$$

В соответствии с этим критерием оптимальной системой в условиях стохастической неопределенности считается система с максимальным значением математического ожидания функции полезности на множестве исходов операции.

При исходах с дискретными значениями показателей

$$K(a_i) = \sum_{k=1}^{m} P(y_k / a_i) \cdot F(y_k), \;\; i = \overline{1,n}$$

где $y_k \; (k = \overline{1,m})$ – значения частного показателя;

$p\left(y_k / a_i\right)$ – условная вероятность появления значения показателя;

$F(y_k)$ – функция полезности значения показателя;

При исходах с непрерывными значениями показателей

$$K(a_i) = \int_{R_g} f(y / a_i) F(y) dy$$

Условия оценки альтернатив

a_i	y_k	$p(y_k / a_i)$	$F(y_k)$	$K(a_i)$
a_1	y_1 y_2 y_m	$p(y_1 / a_1)$ $p(y_2 / a_1)$ $p(y_m / a_1)$	$F(y_1)$ $F(y_2)$ $F(y_m)$	$K(a_1)$
a_2	y_1 y_2 y_m	$p(y_1 / a_2)$ $p(y_2 / a_2)$ $p(y_m / a_2)$	$F(y_1)$ $F(y_2)$ $F(y_m)$	$K(a_2)$

Определение полезности

Определение полезности как меры оценки того или иного исхода операции представляет сложную задачу, точные методы решения которой пока не найдены. Все известные способы определения функции полезности носят приближенный характер и относятся к экспертному оцениванию или аппроксимации.

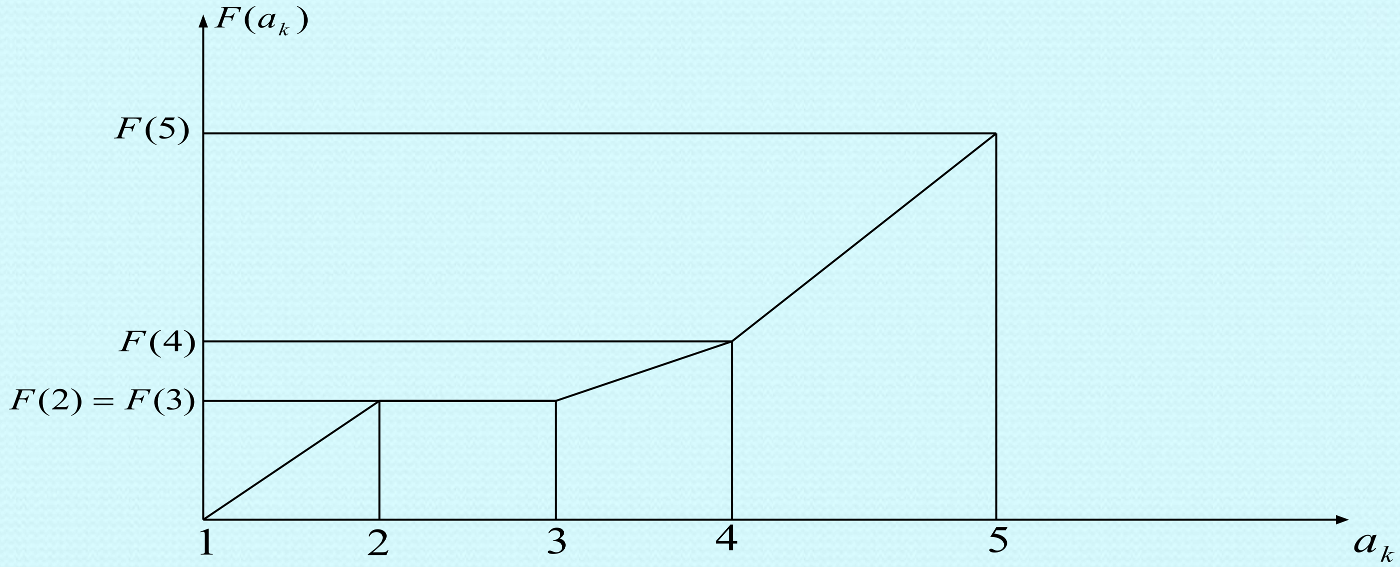

Рисунок – Функция полезности на основе предпочтений ЛПР

Определение полезности (продолжение)

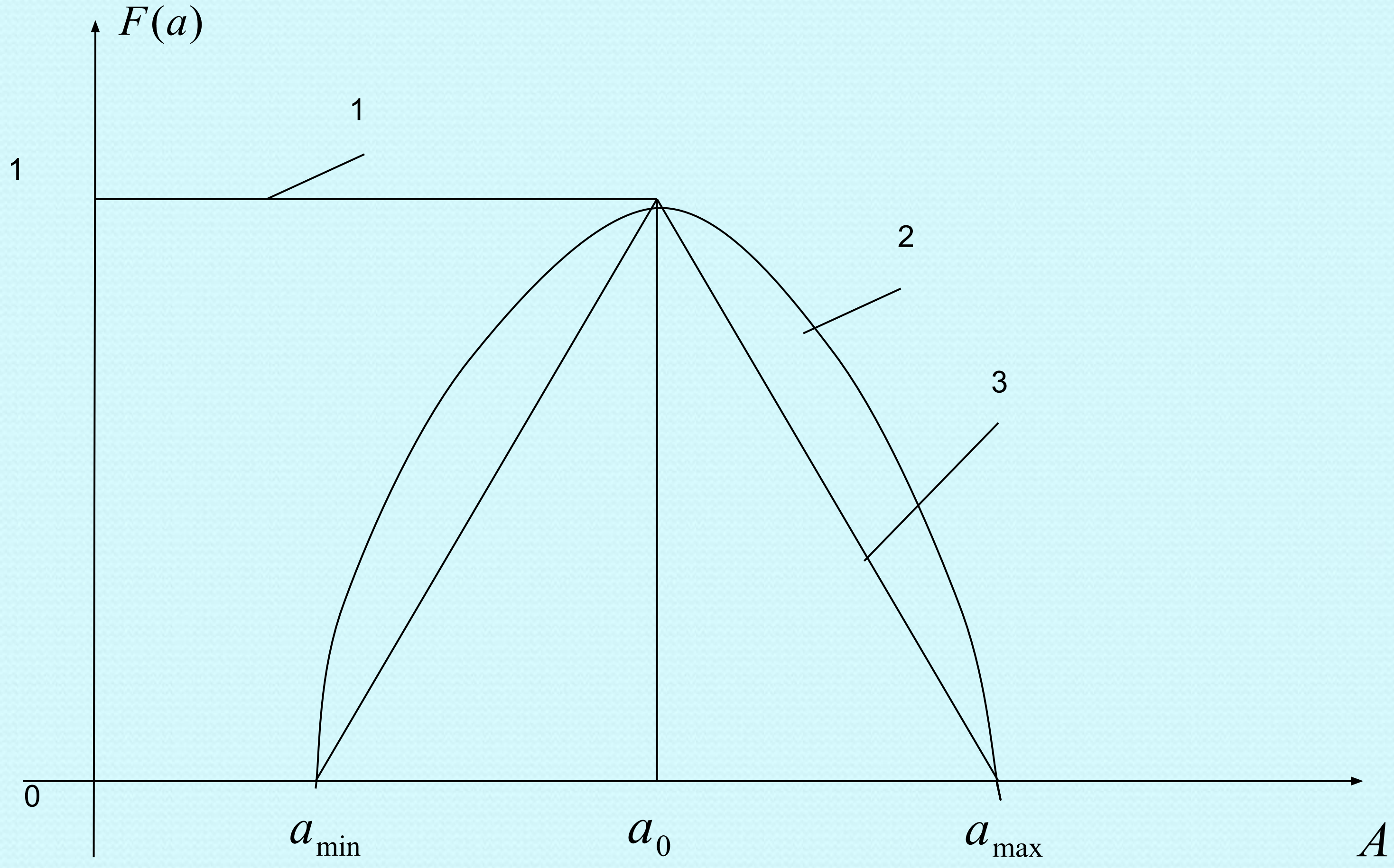

Рисунок – Аппроксимация функции полезности
1 – одноступенчатое, 2 – косинусоидальное, 3 – треугольное

Пример

Оценить варианты конфигурации гетерогенной ЛВС общего пользования.

Операция – обмен сообщениями между пользователями,

альтернативы – вариант размещения сетевого оборудования,

показатель исхода операции – число переданных сообщений n_k.

Таблица – Данные для оценки ЛВС

a_i	n_k	$p(n_k / a_i)$	$F(n_k)$	$K(a_i)$
Вариант 1	60 40 20	0,3 0,5 0,2	0,8 0,5 0,1	
Вариант 2	60 40 20	0,25 0,6 0,15	0,8 0,5 0,1	

Критерии оценки систем

$$K(a_1) = 1/3 \cdot (0,3 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,1) = 0,17$$

$$K(a_2) = 1/3 \cdot (0,25 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,5 + 0,15 \cdot 0,1) = 0,172$$

$$K_{опт} = \max K(a_i) = K(a_2) = 0,172$$

В качестве оптимальной системы должен быть признан вариант 2.

Кроме оптимизации «в среднем» в вероятностных операциях используются и другие критерии оценки систем:

- максимум вероятности случайного события;
- максимум вероятностной гарантии достижения результата не ниже требуемого уровня;
- максимум среднего квадрата уклонения результата от требуемого;
- минимум дисперсии результата;
- минимум среднего (байесовского) риска (минимум средних потерь).

Вопросы и задания для самоконтроля

- Что представляет собой матрица решений?
- Что такое полезность исхода операции?
- Каким математическим выражением можно представить критерий оптимальности для вероятностных операций?
- Сформулируйте аксиому измеримости?
- В какой аксиоме предпочтение исхода ***ai*** исходу ***aj*** не зависит от порядка, в котором они представлены.
- Сформулируйте аксиому независимости.
- Что представляет собой функция полезности?
- Как определить функцию полезности?
- Какие критерии оценки систем используются в вероятностных операциях?