Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Определение.
Уравнения вида $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$ называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.
a, b, c *−постоянные коэффициенты.*

Теорема.
Если число k_0 является корнем уравнения $ak^2 + \mathrm{b}k + c = 0$, то функция $y(x) = e^{k_0 x}$ является решением уравнения
$ay'' + \mathrm{b}y' + cy = 0$

$\boldsymbol{ak^2 + bk + c = 0}$ - характеристическое уравнение.

Общее решение ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

		Общее решение
	$D > 0$	
	$D = 0$	
	$D < 0$	

Решите уравнение

1) $y'' - 7y' + 6y = 0$ составим характеристическое уравнение

$k^2 - 7k + 6 = 0$

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25$, D >0 2-а д.к.

$$k_1 = \frac{7+\sqrt{25}}{2\cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$$

$$k_2 = \frac{7-\sqrt{25}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Т.к. D>0, то формула общего решения

$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

$\boldsymbol{y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{x}}$ **-** общее решение

1) $y'' + 4y' + 4y = 0$ составим характеристическое уравнение

$k^2 + 4k + 4 = 0$

$D = (4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$,

D =0 2-а равных д.к. ($k_1 = k_2$)

$$k_1 = \frac{4}{2 \cdot 1} = 2$$

Т.к. D=0, то формула общего решения

$y = (C_1 x + C_2)e^{k_1 x}$

$\boldsymbol{y = (C_1 x + C_2)e^{2x}}$ - общее решение

1) $y'' - 6y' + 25y = 0$ составим характеристическое уравнение

$k^2 - 6k + 25 = 0$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 36 - 100 = -64$, D <0 2-а к.к.

$$k_1 = \frac{6 + \sqrt{-64}}{2 \cdot 1} = \frac{6 + 8i}{2} = 3 + 4i$$

$k_2 = 3 - 4i$

Т.к. D<0, то формула общего решения

$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$

$\boldsymbol{y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)}$ - общее решение