

ТЕМА

Минимизация логических функций

Задача *минимизации* логической функции заключается в том, чтобы найти наиболее компактное её представление в виде нормальной формы минимальной сложности – *минимальной дизъюнктивной нормальной формы* (МДНФ) или *минимальной конъюнктивной нормальной формы* (МКНФ).

Минимальная нормальная форма – это нормальная форма, содержащая минимальное количество переменных, взятых с отрицаниями или без.

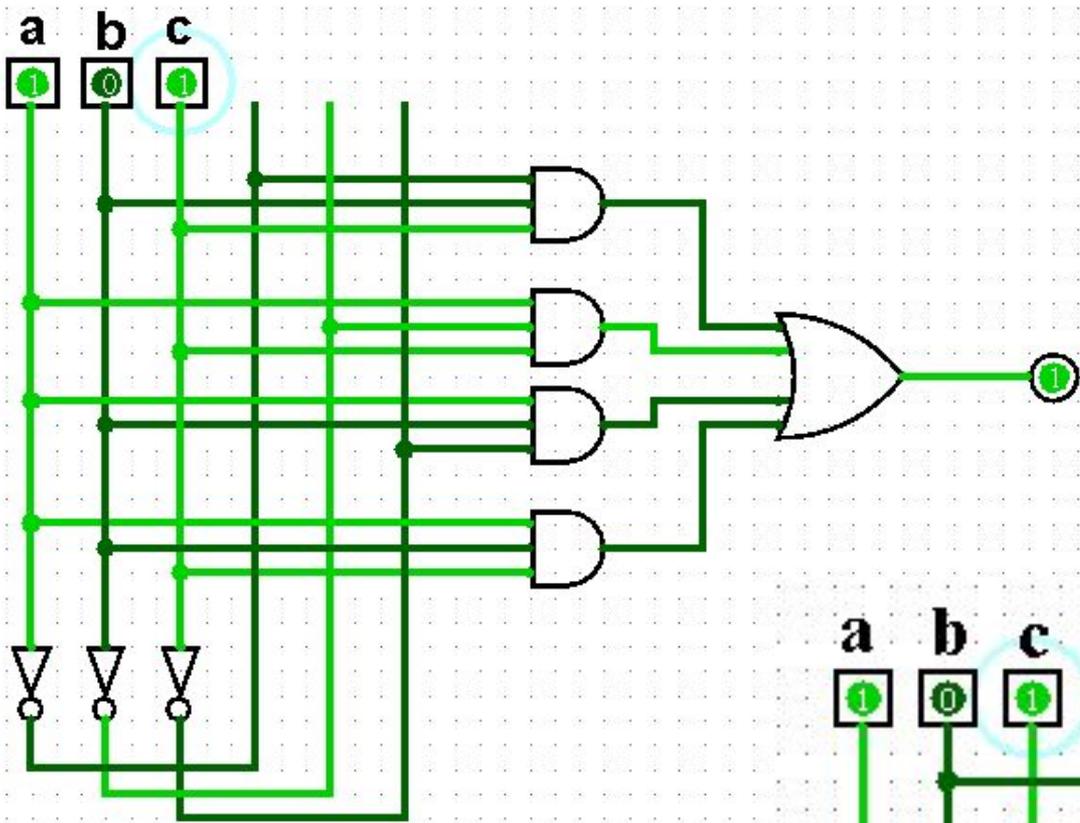
Минимальная дизъюнктивная нормальная форма – это дизъюнкция минимального числа конъюнкций переменных, взятых с отрицаниями или без.

Минимальная конъюнктивная нормальная форма – это конъюнкция минимального числа дизъюнкций переменных, взятых с отрицаниями или без.

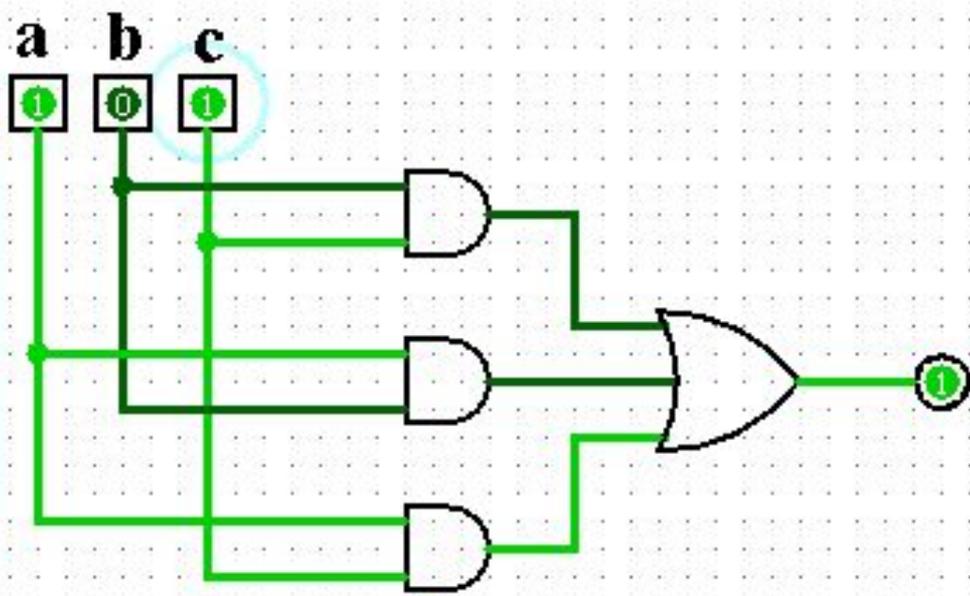
Метод эквивалентных логических преобразований

$$\begin{aligned} F(a, b, c)_{\text{СДНФ}} &= \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc = \\ &= \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab(\bar{c} + c) = \\ &= \bar{a}bc + a(\bar{b}c + b) = \\ &= \bar{a}bc + a(c + b) = \\ &= \bar{a}bc + ac + ab = \\ &= c(\bar{a}b + a) + ab = \\ &= c(b + a) + ab = \\ &= cb + ac + ab \end{aligned}$$

$$F(a, b, c)_{\text{МДНФ}} = cb + ac + ab$$



МДНФ →



← СДНФ

Диаграмма Вейча (карта Карно) — графический способ минимизации логических функций. Работает на основе операций склеивания и поглощения. Представляет собой особым образом переупорядоченную таблицу истинности. Был изобретен в 1952 Эдвардом В. Вейчем и усовершенствован в 1953 Морисом Карно, физиком из «Bell Labs».

Операция склеивания осуществляется между двумя совершенными конъюнктами или дизъюнктами, у которых совпадают все литералы, кроме одного. В этом случае совпадающие литералы, можно вынести за скобки, а оставшиеся подвергнуть склейке. Например:

$$\bar{X}_1 X_2 X_3 X_4 \vee \bar{X}_1 X_2 \bar{X}_3 X_4 = \bar{X}_1 X_2 X_4 (X_3 \vee \bar{X}_3) = \bar{X}_1 X_2 X_4.$$

$$(\bar{X}_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee X_4)(\bar{X}_1 \vee X_2 \vee \bar{X}_3 \vee X_4) =$$

$$\bar{X}_1 \vee X_2 \vee X_4 \vee X_3 \bar{X}_3 = \bar{X}_1 \vee X_2 \vee X_4.$$

В диаграмме Вейча ячейки таблицы истинности переупорядочиваются таким образом, что переход из одной ячейки в другую по вертикали или горизонтали связан с изменением значения только одной переменной.

В результате этого наборы, между которыми возможно склеивание получаются сгруппированными вместе и их легко заметить.

Метод Вейча подходит для минимизации функций до 7ми переменных. При большем количестве переменных теряются достоинства метода.

Интервалом логической функции от K переменных называется такое множество наборов значений переменных, что:

- значение функции на этом множестве постоянно;

- мощность этого множества равна 2^N ($N \leq K$);

- N является количеством переменных, которые упрощаются на этом множестве, а оставшихся $(K-N)$ переменных достаточно для описания значений функции на данном множестве;

- если $N > 0$, то каждый следующий набор отличается от предыдущего значением только одной переменной.

Мощность множества наборов также называется **величиной (размером) интервала**.

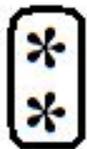
Примеры интервалов

Интервал размера 1



Вырожденный случай. Упрощения не происходит.
Интервал может встречаться на любых диаграммах.

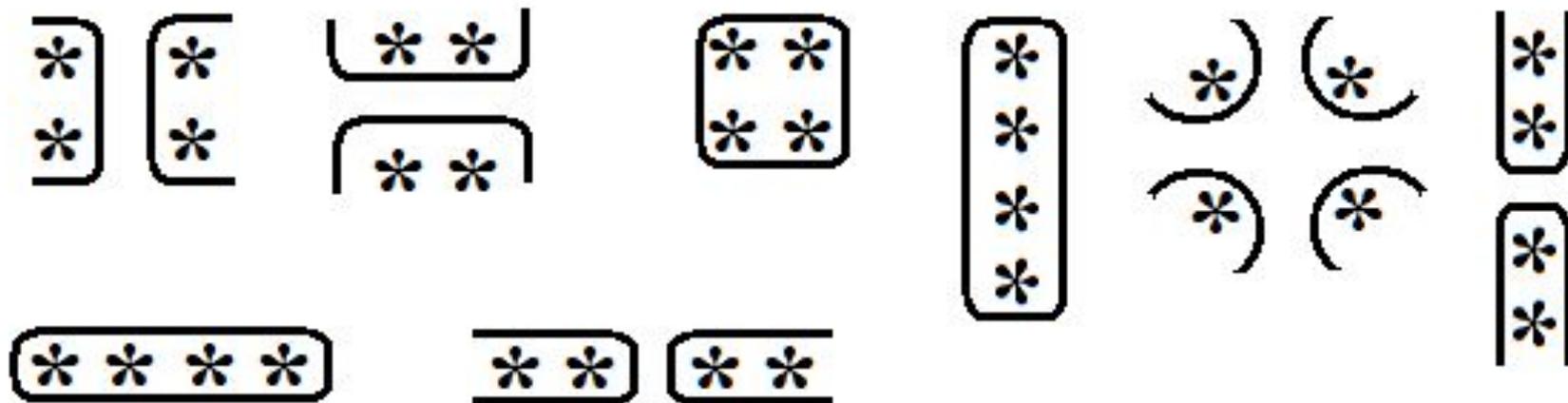
Интервалы размера 2



Упрощается 1 переменная.
Интервалы могут встречаться
на любых диаграммах



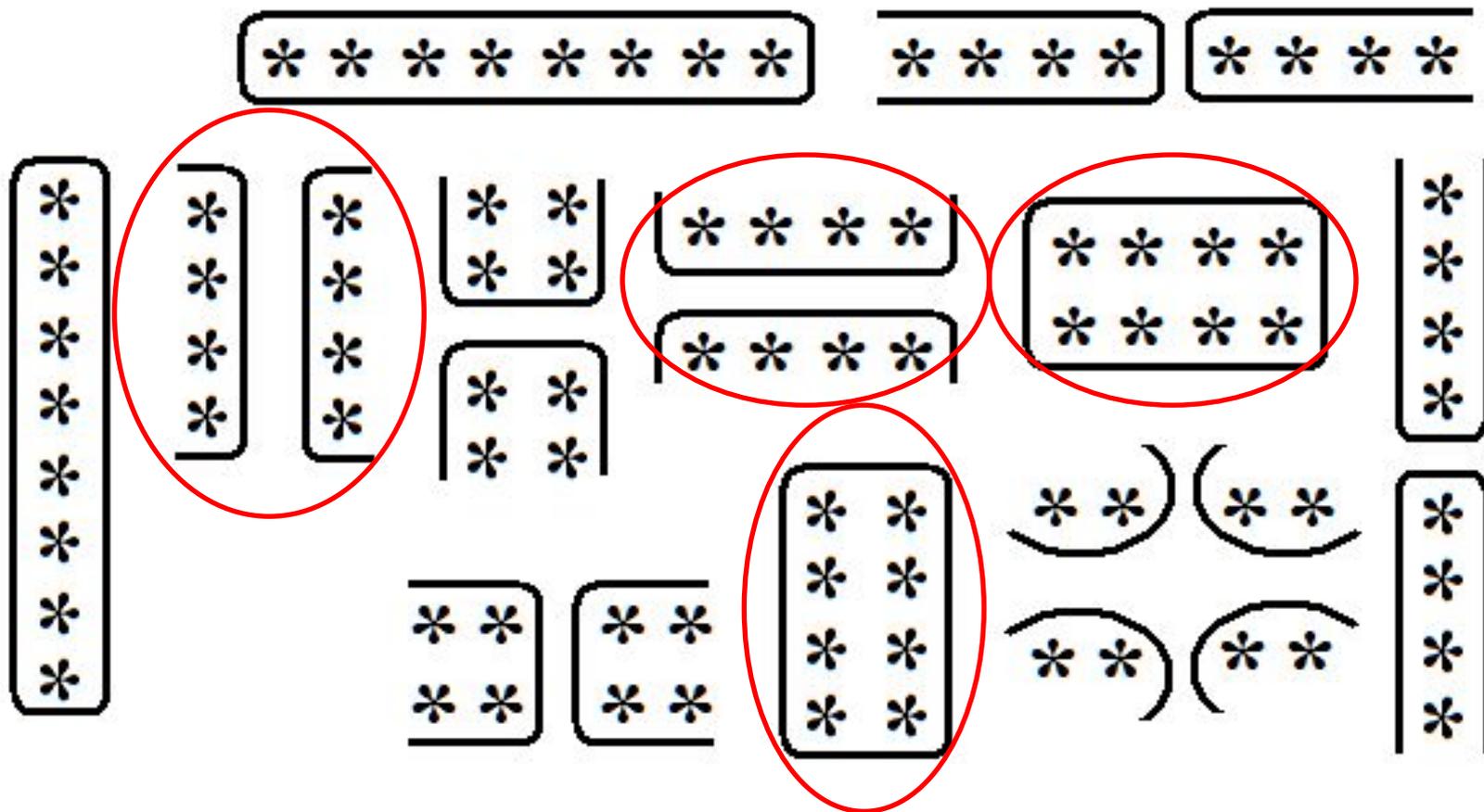
Интервалы размера 4



Упрощается 2 переменных.

Некоторые интервалы встречаются, начиная с диаграммы Вейча для функции от 3-х переменных.

Интервалы размера 8



Упрощается 3 переменных

Некоторые интервалы встречаются, начиная с диаграммы Вейча для функции от 4-х переменных.

Диаграмма Вейча для функции от 2-х переменных

Для МДНФ

	Y	\bar{Y}
X	$f(1\ 1)$	$f(1\ 0)$
\bar{X}	$f(0\ 1)$	$f(0\ 0)$

Для МКНФ

	Y	\bar{Y}
X	$f(0\ 0)$	$f(0\ 1)$
\bar{X}	$f(1\ 0)$	$f(1\ 1)$

Пример построения диаграммы Вейча для функции от двух переменных

Для МДНФ

X	Y	F
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

	Y	\bar{Y}
X	1	1
\bar{X}	0	0

Для МКНФ

$$F_{\text{мднф}} = F_{\text{мкнф}} = X$$

	Y	\bar{Y}
X	0	0
\bar{X}	1	1

Диаграмма Вейча для функции от 3-х переменных

Для МДНФ:

	Y		\bar{Y}	
X	f(110)	f(111)	f(101)	f(100)
\bar{X}	f(010)	f(011)	f(001)	f(000)
	\bar{Z}	Z		\bar{Z}

Для МКНФ:

	Y		\bar{Y}	
X	f(001)	f(000)	f(010)	f(011)
\bar{X}	f(101)	f(100)	f(110)	f(111)
	\bar{Z}	Z		\bar{Z}

Диаграмма Вейча для функции от 4-х переменных для МДНФ

	B		\overline{B}		
A	$f(1100)$	$f(1101)$	$f(1001)$	$f(1000)$	\overline{C}
	$f(1110)$	$f(1111)$	$f(1011)$	$f(1010)$	
\overline{A}	$f(0110)$	$f(0111)$	$f(0011)$	$f(0010)$	
	$f(0100)$	$f(0101)$	$f(0001)$	$f(0000)$	\overline{C}
	\overline{D}	D		\overline{D}	

Диаграмма Вейча для функции от 4-х переменных для МКНФ

	B		\overline{B}		
A	$f(0011)$	$f(0010)$	$f(0110)$	$f(0111)$	\overline{C}
	$f(0001)$	$f(0000)$	$f(0100)$	$f(0101)$	
\overline{A}	$f(1001)$	$f(1000)$	$f(1100)$	$f(1101)$	\overline{C}
	$f(1011)$	$f(1010)$	$f(1110)$	$f(1111)$	
	\overline{D}	D		\overline{D}	

Алгоритм минимизации логических функций при помощи диаграмм Вейча

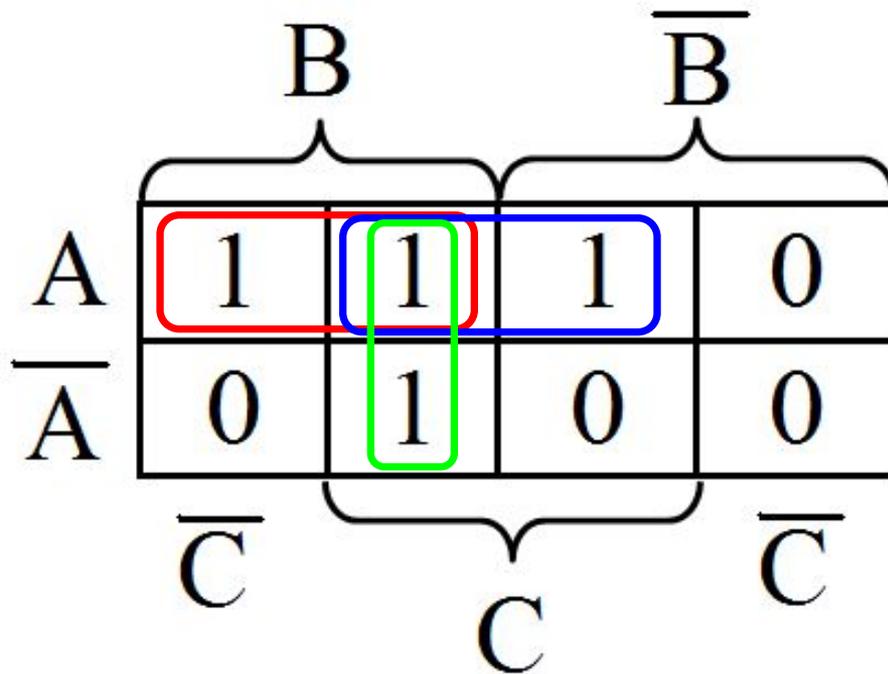
1. Нарисовать исходную таблицу диаграммы и сделать ее разметку в зависимости от количества переменных функции.
2. Заполнить таблицу значениями функции с учетом цели минимизации (МДНФ или МКНФ).
3. Выделить контурами интервалы из единиц (если строится МДНФ) или интервалы из нулей (если строится МКНФ), соблюдая следующие правила:
 - а. Необходимо стараться выделить максимально большие интервалы;
 - б. Каждый новый интервал должен содержать хотя бы одно значение, принадлежащее только ему;
 - с. Необходимо выделить минимально возможное количество интервалов.

4. Выписать формулу МДНФ (или МКНФ), для чего:

- a. Для каждого интервала выписать конъюнкт (дизъюнкт), в который будут входить только те переменные или их отрицания, которые сохраняют свое значение на интервале. Остальные переменные упростятся.
- b. Соединить выписанные конъюнкты (дизъюнкты) через дизъюнкцию (конъюнкцию).

Пример построения диаграммы Вейча для функции от 3-х переменных (МДНФ)

a	b	c	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



$$F_{\text{МДНФ}} = AB \vee AC \vee BC$$

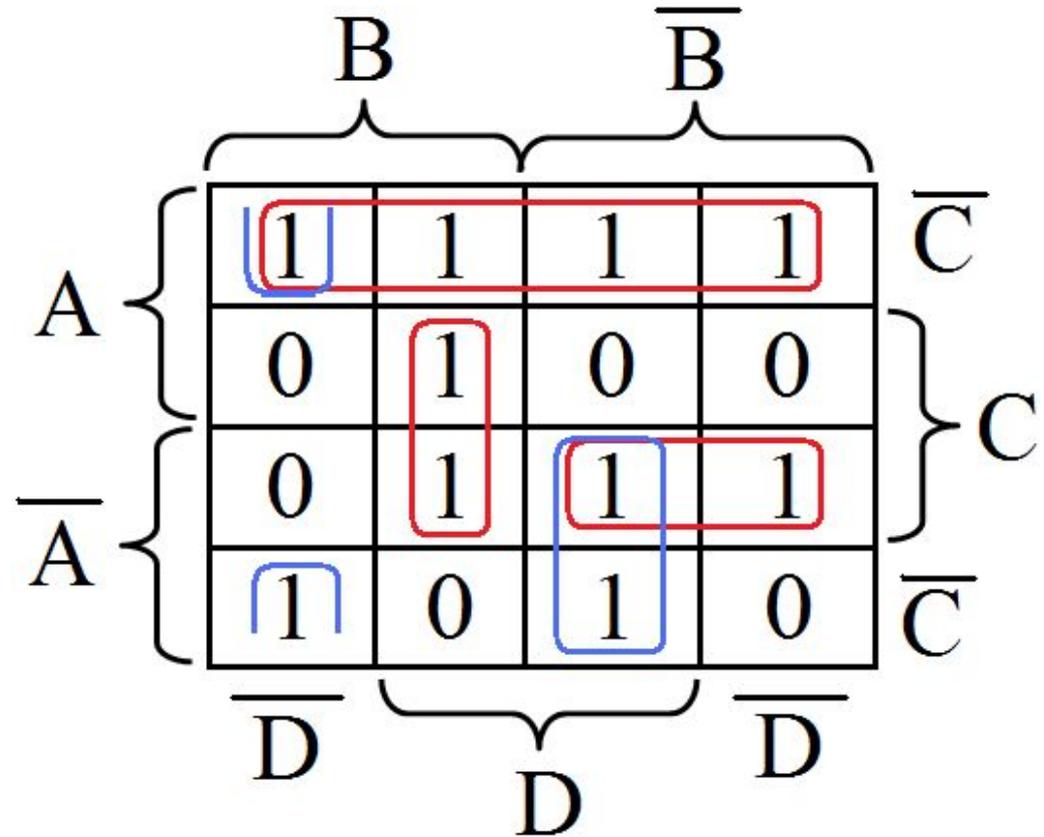
Пример построения диаграммы Вейча для функции от 3-х переменных (МКНФ)

	B		\overline{B}	
A	0	0	0	1
\overline{A}	1	0	1	1
	\overline{C}	C		\overline{C}

$$F_{\text{МКНФ}} = (A \vee B) \& (A \vee C) \& (B \vee C)$$

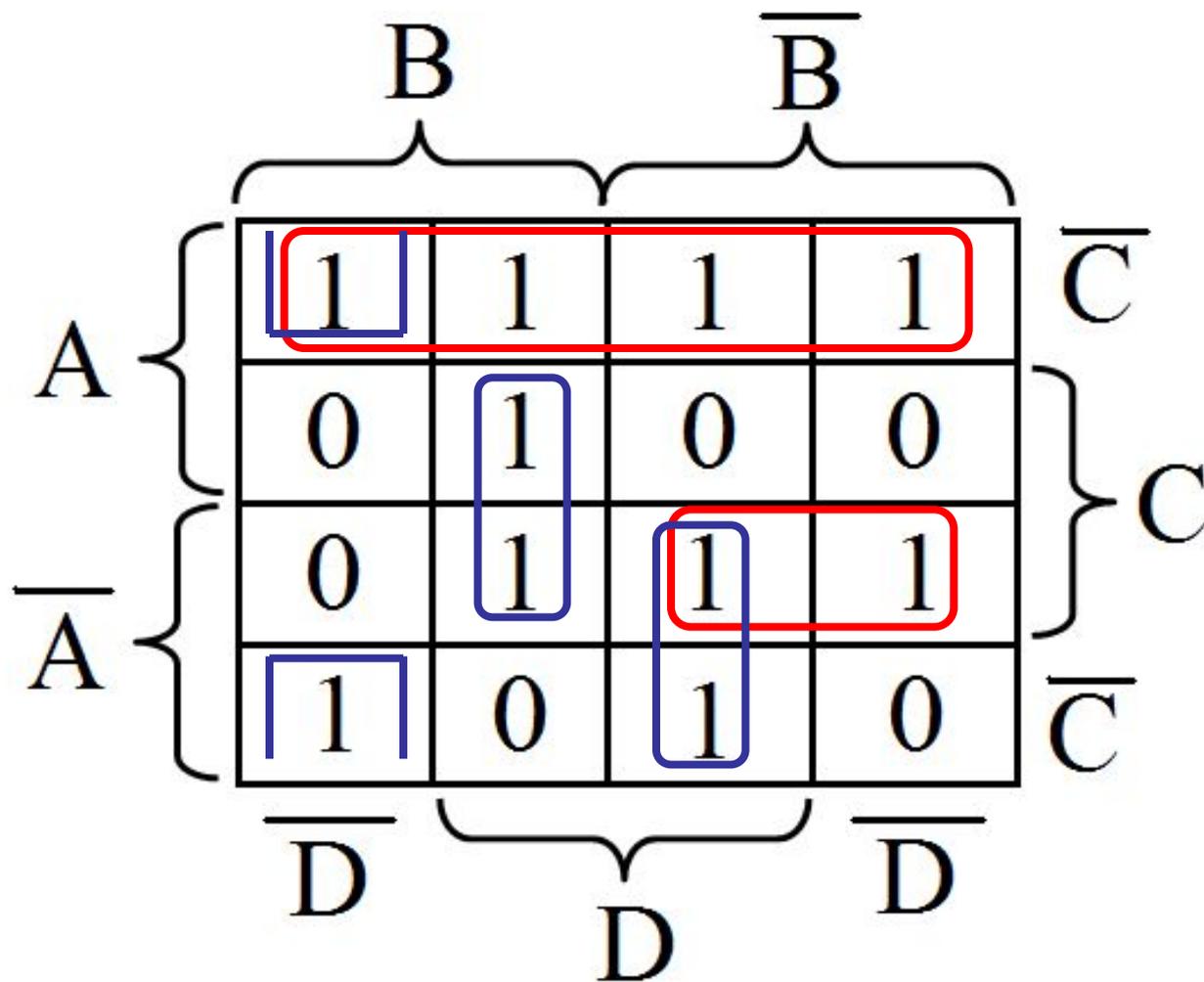
Пример построения диаграммы Вейча для функции от 4-х переменных (МДНФ)

A	B	C	D	F(A,B,C,D)	
0	0	0	0	0	7
0	0	0	1	1	
0	0	1	0	1	
0	0	1	1	1	9
0	1	0	0	1	
0	1	0	1	0	
0	1	1	0	0	C
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	
1	0	0	1	1	D
1	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	1	
1	1	0	1	1	
1	1	1	0	0	
1	1	1	1	1	

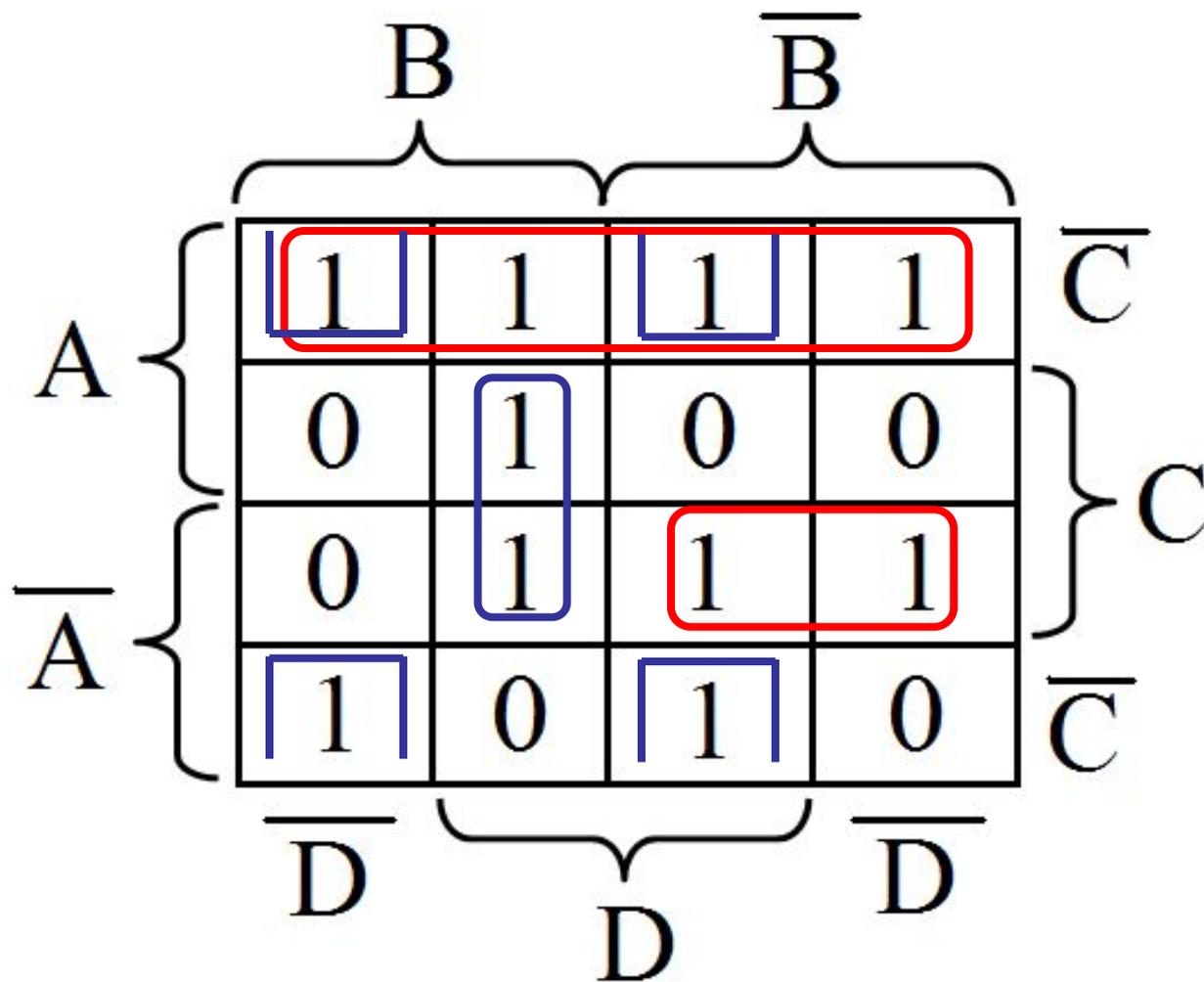


$$F_{\text{МДНФ}} = A\bar{C} \vee B\bar{C}\bar{D} \vee BCD \vee \bar{A}\bar{B}C \vee \bar{A}\bar{B}D$$

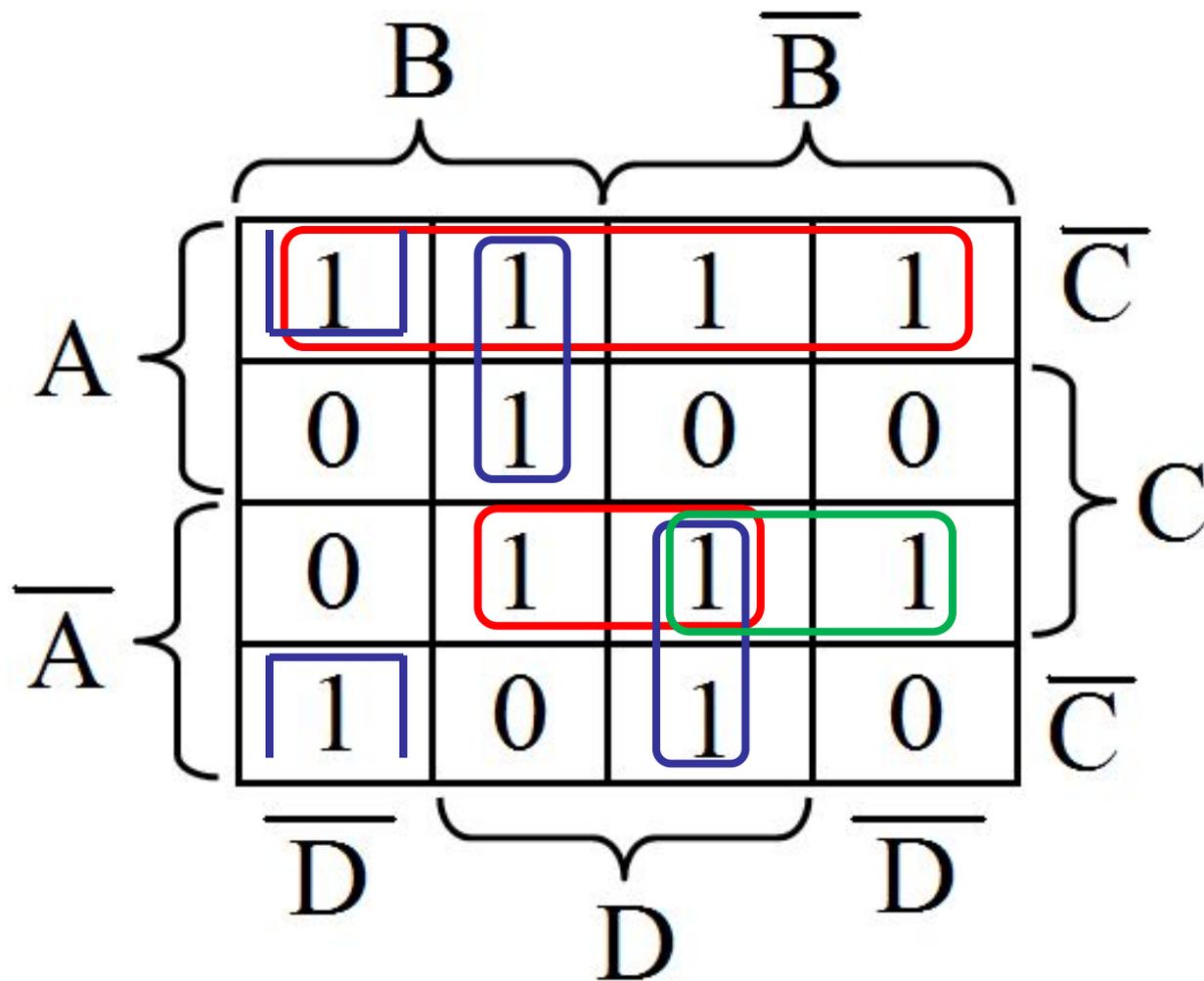
Альтернативное выделение интервалов



Альтернативное выделение интервалов

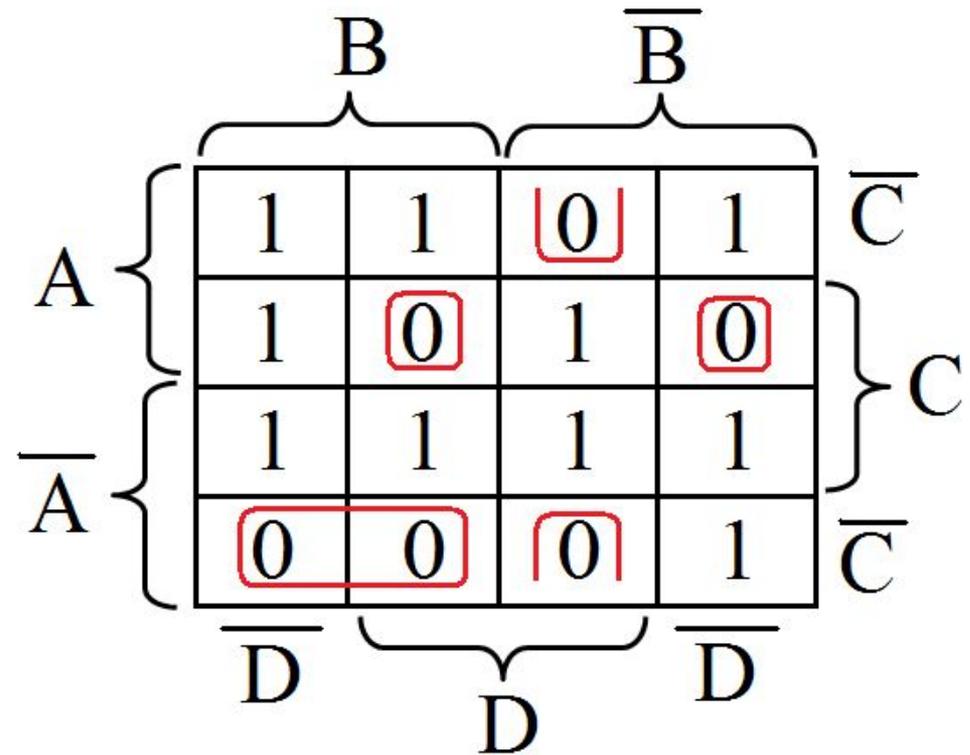


Пример избыточного выделения интервалов



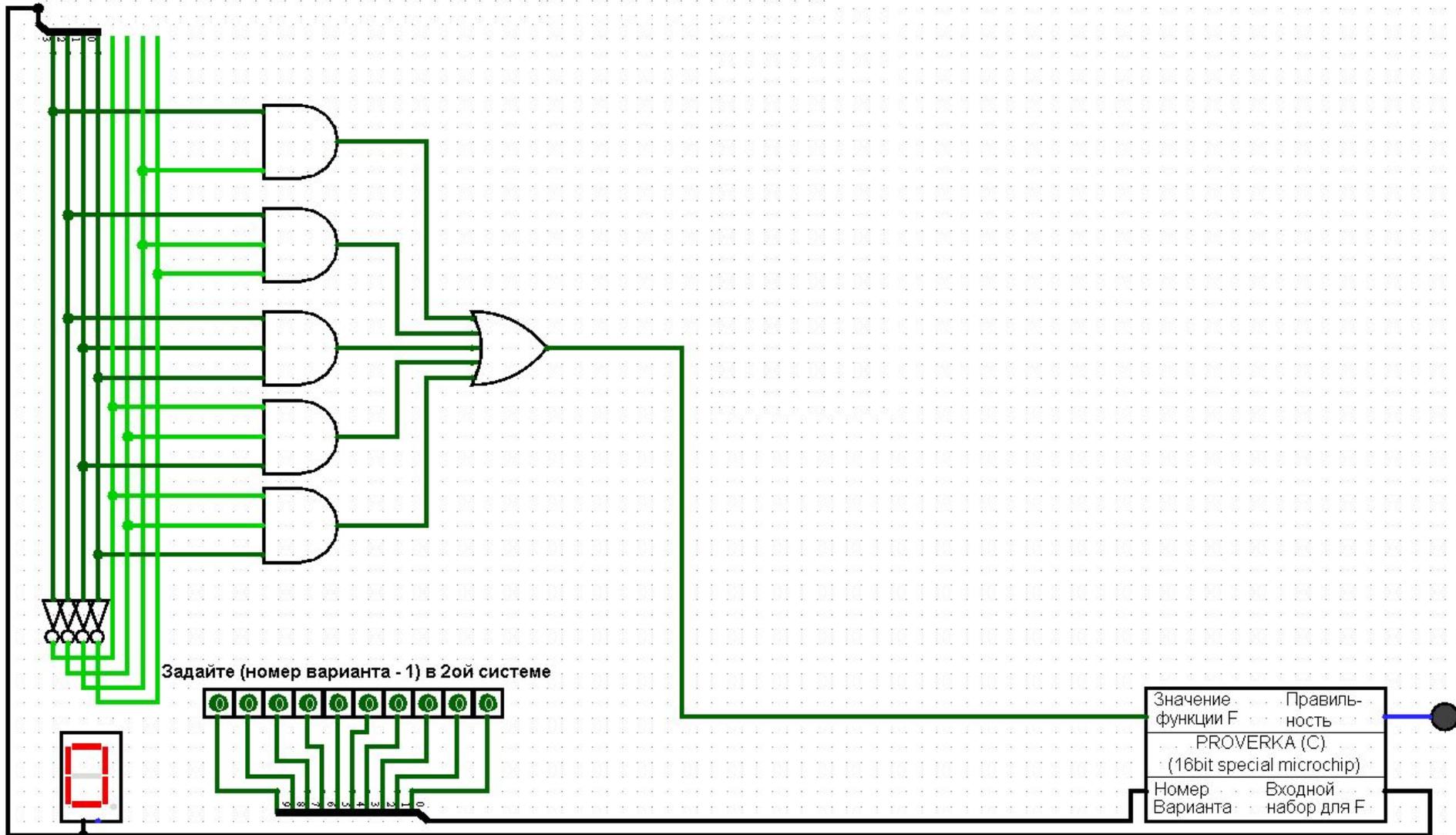
Пример построения диаграммы Вейча для функции от 4-х переменных (МКНФ)

A	B	C	D	F(A,B,C,D)	
0	0	0	0	0	7
0	0	0	1	1	
0	0	1	0	1	
0	0	1	1	1	9
0	1	0	0	1	
0	1	0	1	0	
0	1	1	0	0	C
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	
1	0	0	1	1	D
1	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	
1	1	0	0	1	
1	1	0	1	1	
1	1	1	0	0	
1	1	1	1	1	



$$F_{\text{МКНФ}} = (\bar{A} \vee B \vee \bar{C}) \& (\bar{B} \vee \bar{C} \vee D) \& (A \vee B \vee C \vee D) \& (A \vee \bar{B} \vee C \vee \bar{D})$$

Схема МДФ, подключенная к системе проверки



Минимизация функции от 5ти переменных

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	F
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	F
1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Диаграмма Вейча для функции от 5-ти переменных (для МДНФ)

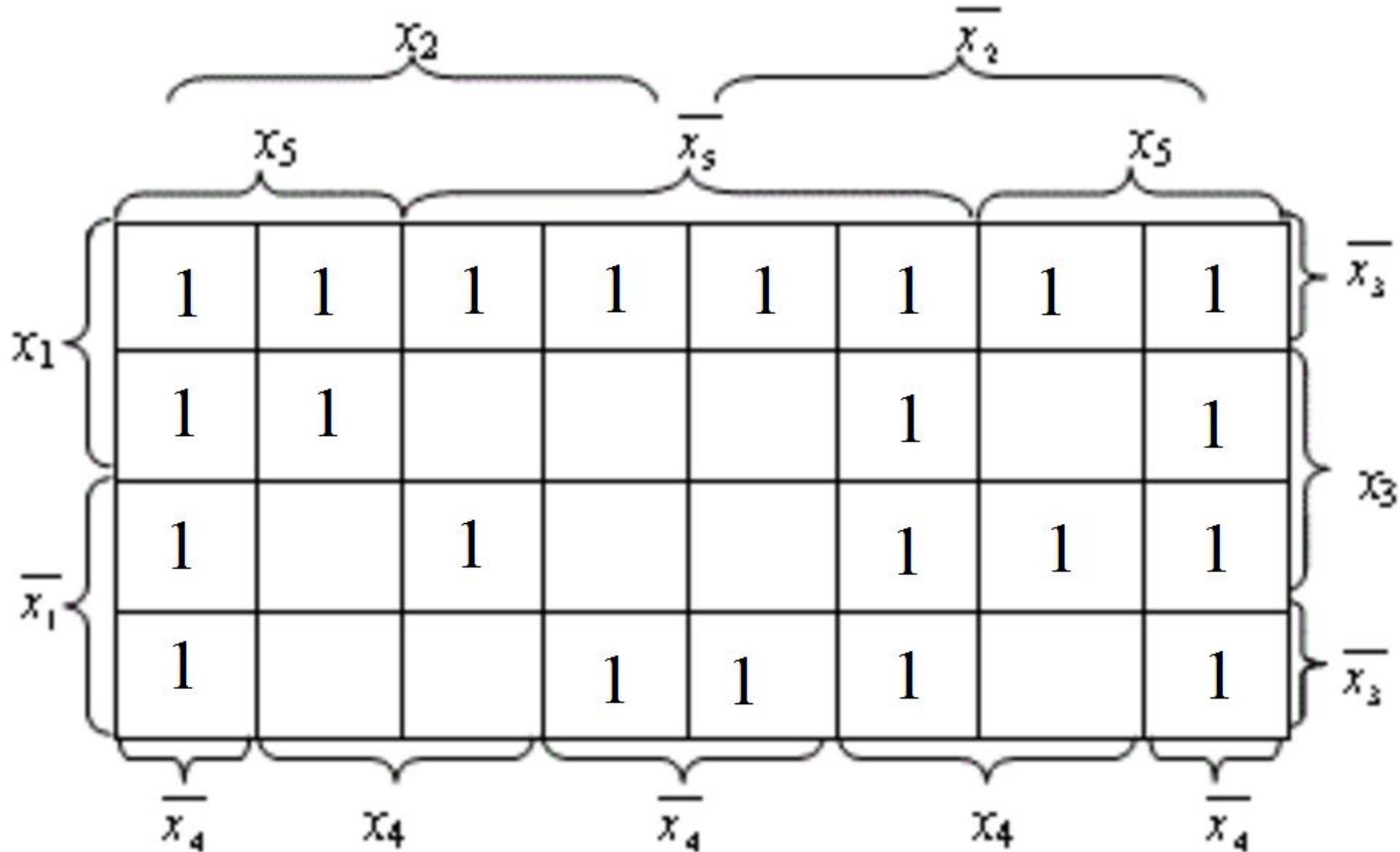


Диаграмма Вейча для функции от 5-ти переменных. Выделены интервалы. (Исправлено)

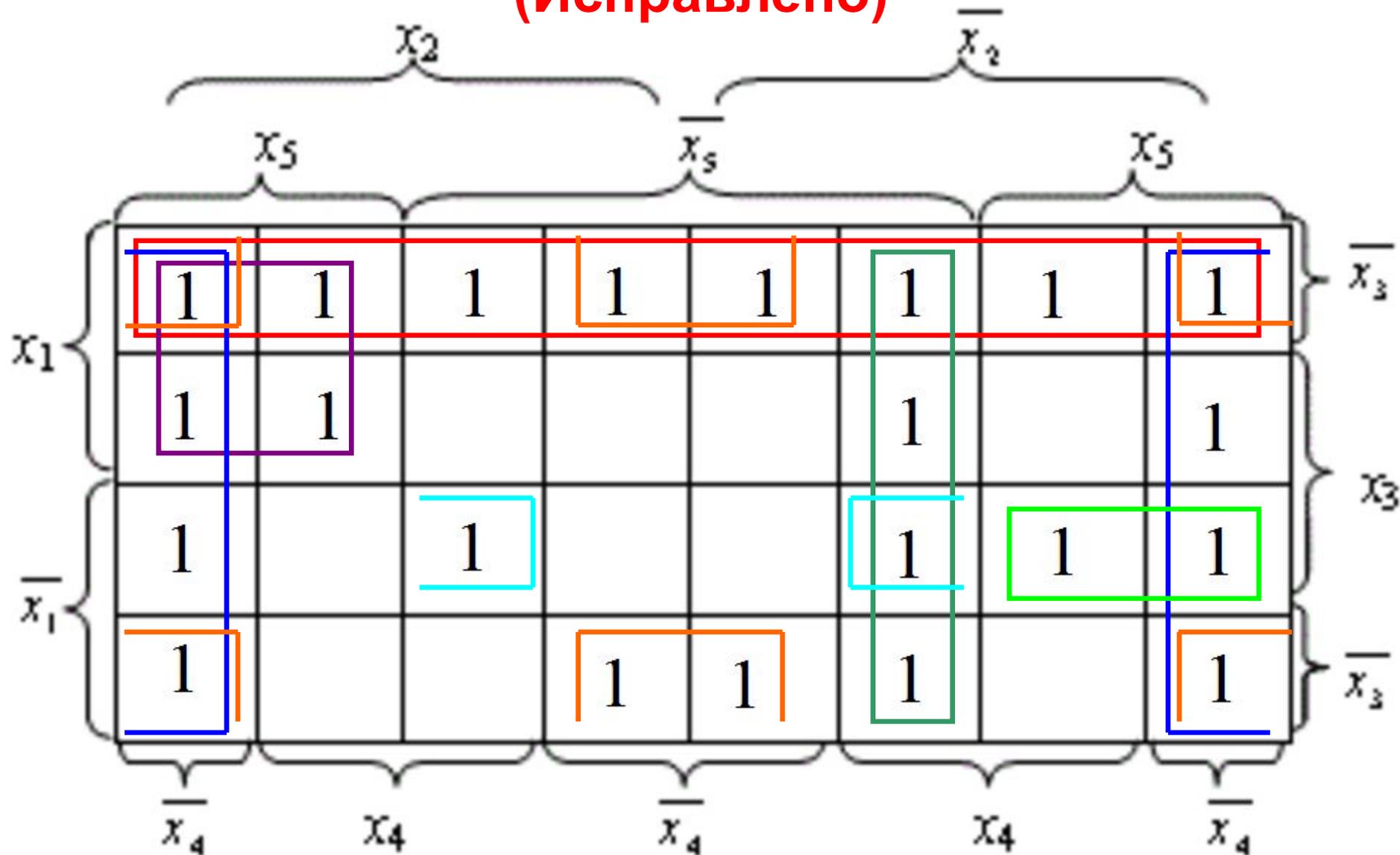
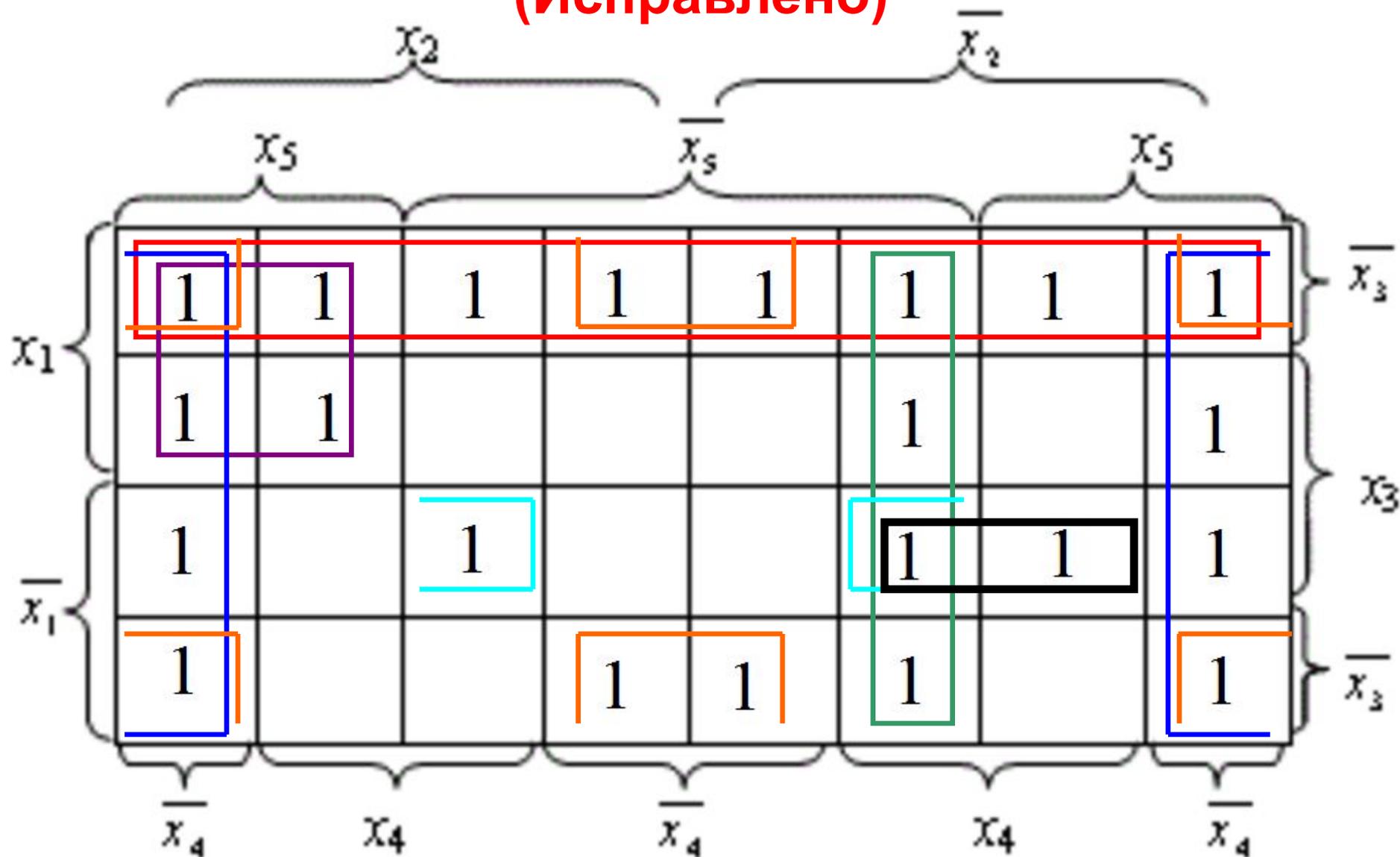


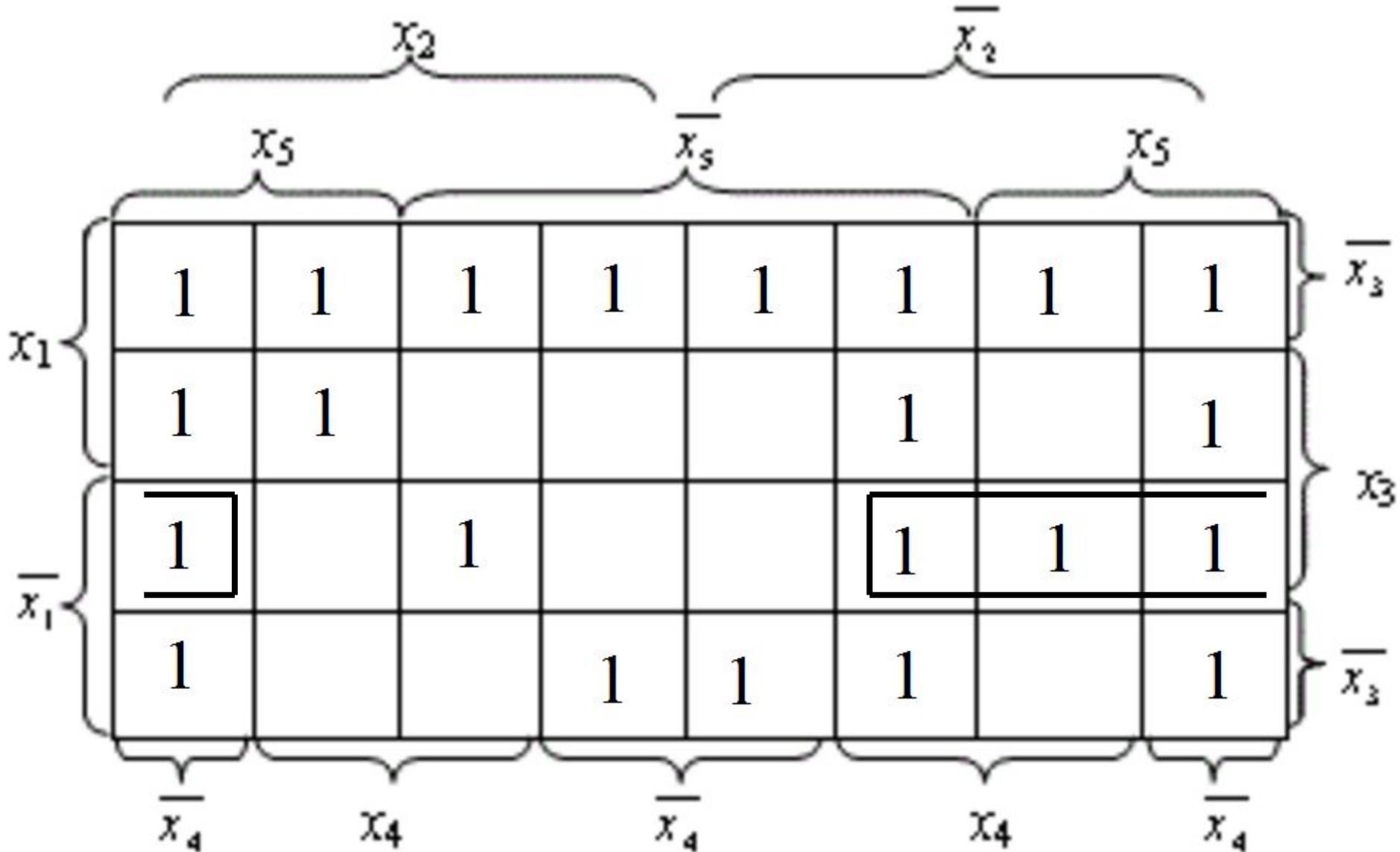
Диаграмма Вейча для функции от 5-ти переменных. Выделены интервалы. (Исправлено)



МДНФ для функции от 5ти переменных (Исправлено)

$$F(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)_{\text{МДНФ}} = X_1 \overline{X_3} + X_5 \overline{X_4} + X_1 X_2 X_5 + \overline{X_2} X_4 \overline{X_5} + \overline{X_3} \overline{X_4} + \overline{X_1} \overline{X_2} X_3 X_5 + \overline{X_1} X_3 X_4 \overline{X_5}$$

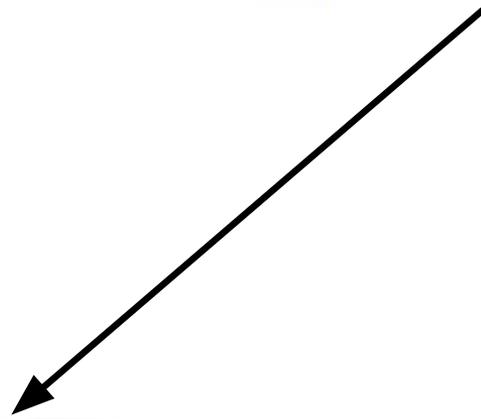
Пример ошибочного выделения интервала



Минимизация частично определенных логических функций

A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	*
1	0	1	1	*
1	1	0	0	*
1	1	0	1	*
1	1	1	0	*
1	1	1	1	*

В некоторых задачах нам известно, что определенные входные комбинации никогда не возникнут.



Неопределенные значения интерпретируются таким образом, чтобы увеличить размер или объединить уже существующие интервалы. При этом не должны появляться лишние интервалы.

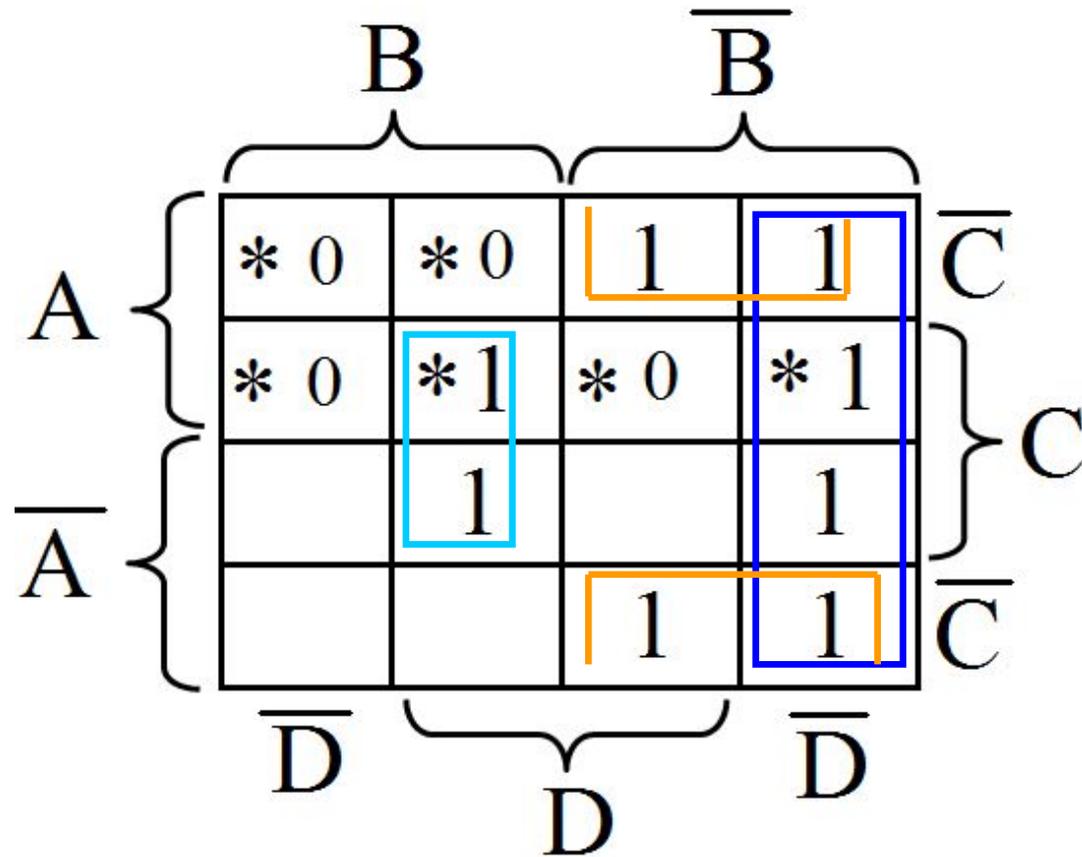
Построим МДНФ

		B		\overline{B}		
		{		{		
A	{	*	*	1	1	\overline{C}
		*	*	*	*	}
\overline{A}	{		1		1	}
				1	1	\overline{C}
		\overline{D}	{		\overline{D}	
			D			

В данном случае удобно так:

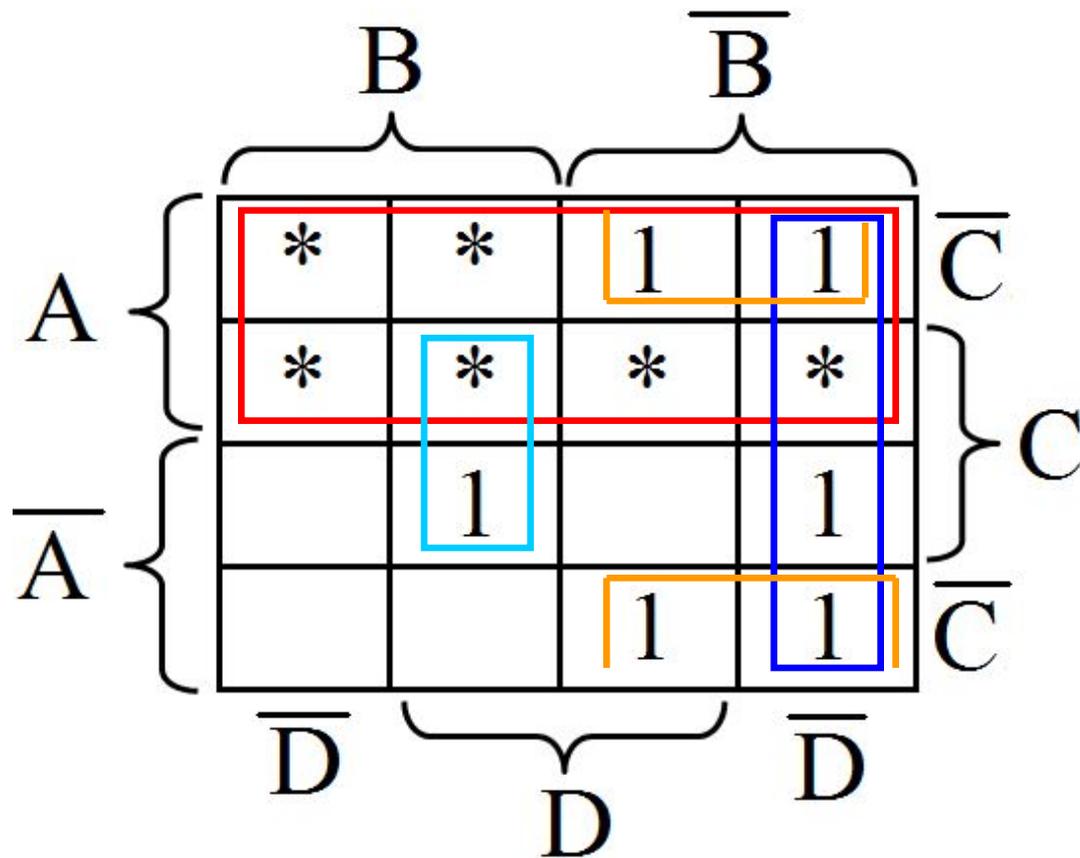
	B		\overline{B}		
A	$*0$	$*0$	1	1	\overline{C}
	$*0$	$*1$	$*0$	$*1$	C
\overline{A}		1		1	C
			1	1	\overline{C}
	\overline{D}	D		\overline{D}	

Получаются следующие интервалы



$$F(A, B, C, D)_{\text{МДНФ}} = \boxed{\bar{B}\bar{D}} + \boxed{\bar{B}C} + \boxed{BCD}$$

Пример выделения лишнего интервала



Не минимальная форма

$$F(A, B, C, D) = \boxed{A} + \boxed{\overline{B} \overline{D}} + \boxed{\overline{B} \overline{C}} + \boxed{BCD}$$

Построим МКНФ

		B	\overline{B}	
A	0		0	\overline{C}
			0	0
\overline{A}			*	*
	*	*	*	*
	\overline{D}	D	\overline{D}	C

Построим МКНФ

(Исправлено)

		B		\overline{B}		
		C		\overline{C}		
A		0		0		
				0	0	
				*	*	
\overline{A}		0*	*	*	0	*
		\overline{D}		D		\overline{D}
		\overline{C}		C		

$$F(A, B, C, D)_{\text{МКНФ}} = (\overline{B} + D)(\overline{B} + C)(B + \overline{C} + \overline{D})$$

**Приведение минимизированной функции
к заданному логическому базису
на примере функции 79СD**

(МДНФ к базису ИЛИ-НЕ)

$$\begin{aligned}
 F_{\text{МДНФ}} &= \overline{A}\overline{C} + \overline{B}\overline{C}\overline{D} + BCD + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}D = \\
 &= \overline{\overline{\overline{A}\overline{C}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{B}\overline{C}\overline{D}}}} + \overline{\overline{\overline{BCD}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{A}\overline{B}C}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{A}\overline{B}D}}} = \\
 &= \overline{\overline{A+C}} + \overline{\overline{\overline{B+C+D}}} + \overline{\overline{\overline{B+C+D}}} + \overline{\overline{A+B+\overline{C}}} + \overline{\overline{A+B+\overline{D}}} = \\
 &= \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{A+C}}}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{B+C+D}}}}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{B+C+D}}}}}} + \overline{\overline{\overline{A+B+\overline{C}}}} + \overline{\overline{\overline{A+B+\overline{D}}}}
 \end{aligned}$$

Приведение минимизированной функции к заданному логическому базису

(МДНФ к базису И-НЕ)

$$\begin{aligned} F_{\text{МДНФ}} &= \overline{A}\overline{C} + \overline{B}\overline{C}\overline{D} + BCD + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}D = \\ &= \overline{\overline{\overline{A}\overline{C}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{B}\overline{C}\overline{D}}}} + \overline{\overline{\overline{BCD}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{A}\overline{B}C}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{A}\overline{B}D}}} = \\ &= \overline{\overline{\overline{A}\overline{C}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{B}\overline{C}\overline{D}}}} + \overline{\overline{\overline{BCD}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{A}\overline{B}C}}} + \overline{\overline{\overline{\overline{A}\overline{B}D}}} = \\ &= \overline{\overline{\overline{A}\overline{C}}} \& \overline{\overline{\overline{\overline{B}\overline{C}\overline{D}}}} \& \overline{\overline{\overline{BCD}}} \& \overline{\overline{\overline{\overline{A}\overline{B}C}}} \& \overline{\overline{\overline{\overline{A}\overline{B}D}}} \end{aligned}$$

Приведение минимизированной функции к заданному логическому базису

(МКНФ к базису ИЛИ-НЕ)

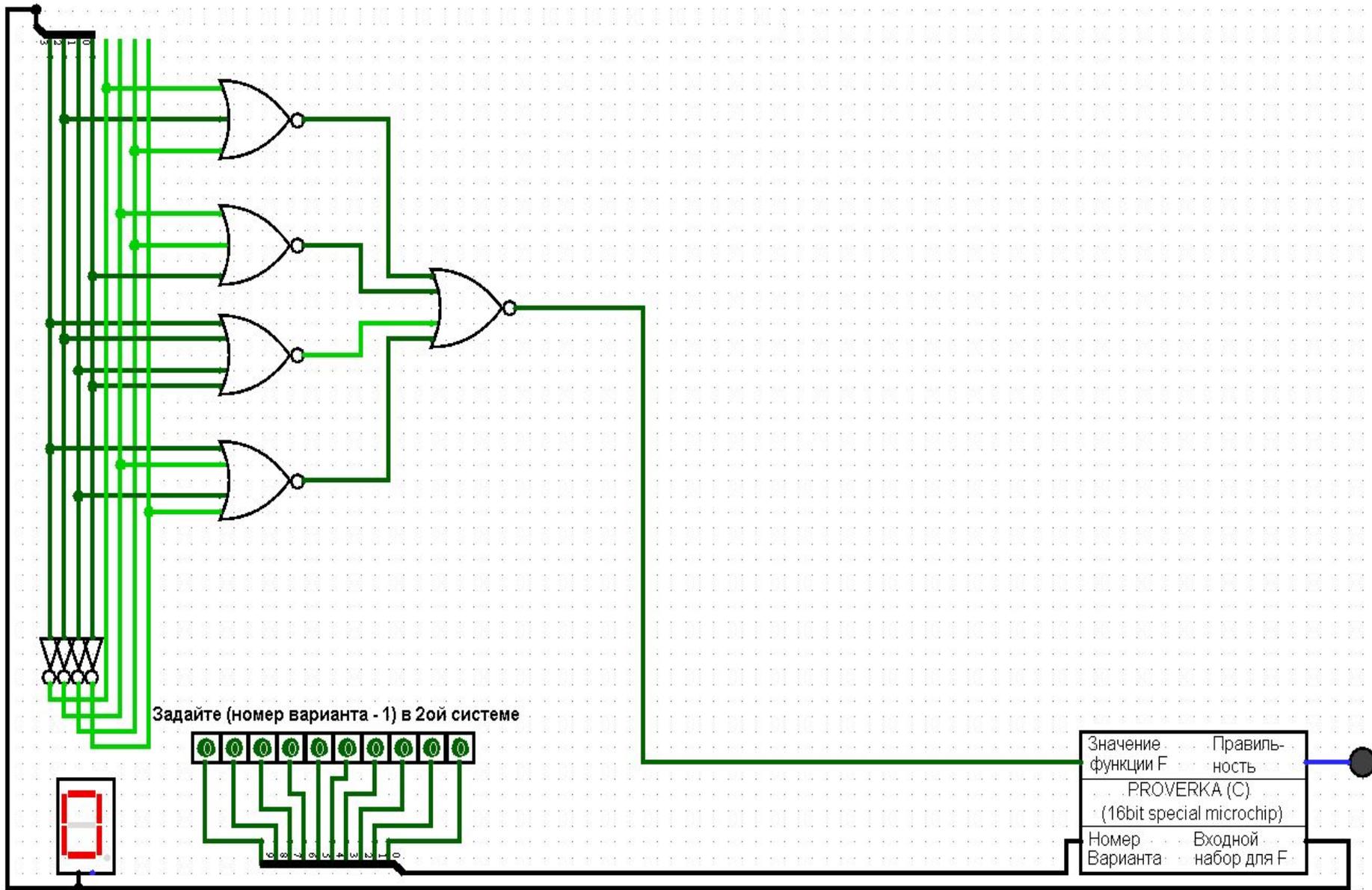
$$\begin{aligned} F_{\text{МКНФ}} &= (\bar{A} + B + \bar{C}) \& (\bar{B} + \bar{C} + D) \& \\ &\& (A + B + C + D) \& (A + \bar{B} + C + \bar{D}) = \\ &= \overline{\overline{(\bar{A} + B + \bar{C}) \& (\bar{B} + \bar{C} + D) \&}} \\ &\overline{\overline{\& (A + B + C + D) \& (A + \bar{B} + C + \bar{D})}} = \\ &= \overline{\overline{(\bar{A} + B + \bar{C})} + \overline{\overline{(\bar{B} + \bar{C} + D)}}} + \\ &\overline{\overline{(A + B + C + D)} + \overline{\overline{(A + \bar{B} + C + \bar{D})}}} \end{aligned}$$

Приведение минимизированной функции к заданному логическому базису

(МКНФ к базису И-НЕ)

$$\begin{aligned} F_{МКНФ} &= (\bar{A} + B + \bar{C}) \& (\bar{B} + \bar{C} + D) \& \\ &\& (A + B + C + D) \& (A + \bar{B} + C + \bar{D}) = \\ &= \overline{\overline{(\bar{A} + B + \bar{C}) \& (\bar{B} + \bar{C} + D) \&}} \\ &\& \overline{\overline{(A + B + C + D) \& (A + \bar{B} + C + \bar{D})}} = \\ &= \overline{(A \& \bar{B} \& C) \& (B \& C \& \bar{D})} \& \\ &\& \overline{\overline{(\bar{A} \& \bar{B} \& \bar{C} \& \bar{D}) \& (\bar{A} \& B \& \bar{C} \& D)}} = \\ &= \overline{\overline{(A \& \bar{B} \& C) \& (B \& C \& \bar{D})} \&} \\ &\& \overline{\overline{(\bar{A} \& \bar{B} \& \bar{C} \& \bar{D}) \& (\bar{A} \& B \& \bar{C} \& D)}} \end{aligned}$$

Реализация МКНФ в базисе ИЛИ-НЕ



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !!!