Задание:

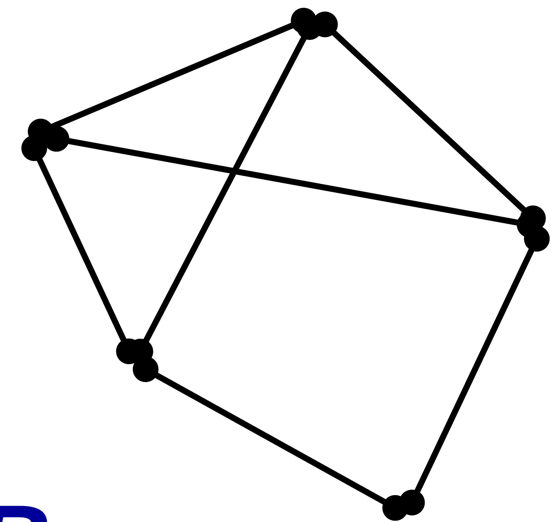
.Изучить теоретический материал по темам:

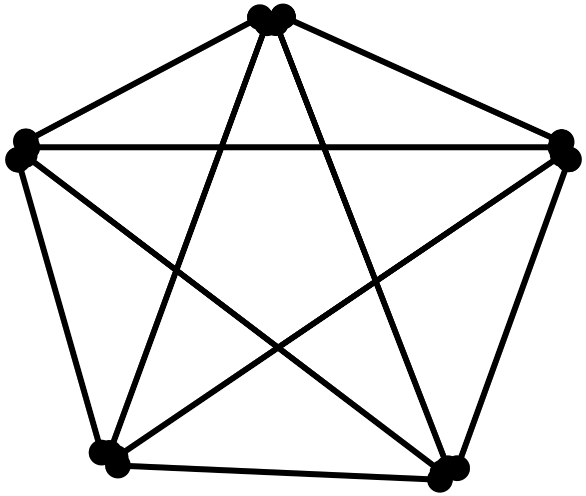
«Основные понятия теории графов», «Орграф»,

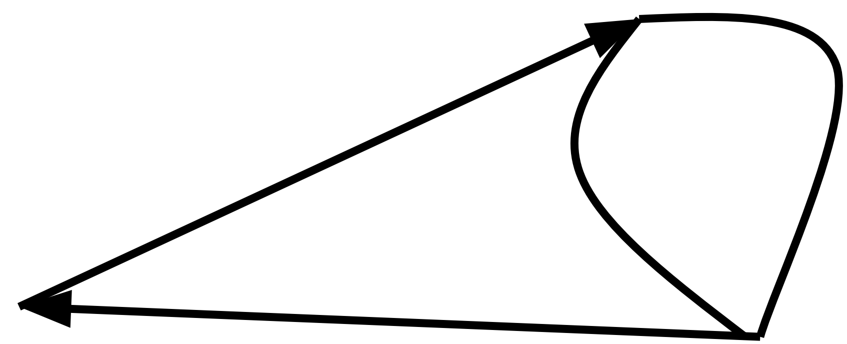
«Операции над графами».

.Выполнить проверочные работы № 1,2.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ
И ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ГРАФА
И ЕГО ЭЛЕМЕНТОВ







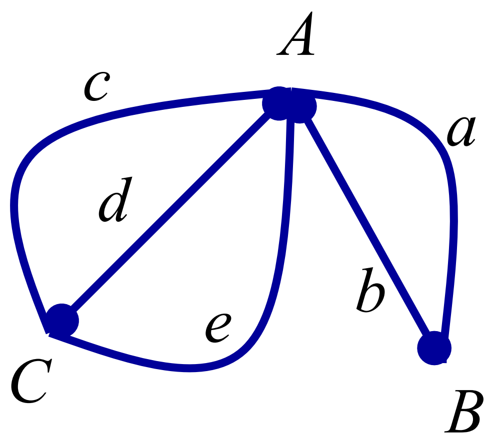
ГРАФОМ G = (V, X) НАЗЫВАЕТСЯ ПАРА ДВУХ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ: МНОЖЕСТВО ТОЧЕК И МНОЖЕСТВО ЛИНИЙ, СОЕДИНЯЮЩИХ НЕКОТОРЫЕ ПАРЫ ТОЧЕК.

$$V \times V : X \subset (V \times V)$$

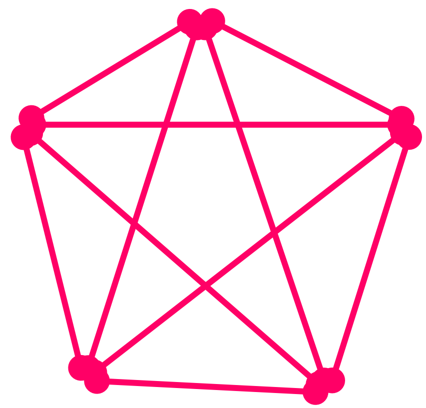
ВПЕРВЫЕ ПОНЯТИЕ «ГРАФ» ВВЕЛ В 1936 г. ВЕНГЕРСКИЙ МАТЕМАТИК ДЕННИ КЁНИГ. НО ПЕРВАЯ РАБОТА ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ ПРИНАДЛЕЖАЛА ПЕРУ ВЕЛИКОГО ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА И БЫЛА НАПИСАНА ЕЩЕ В 1736 г.

ТОЧКИ НАЗЫВАЮТСЯ **ВЕРШИНАМИ**, ИЛИ **УЗЛАМИ**, ГРАФА, ЛИНИИ – **РЕБРАМИ** ГРАФА.

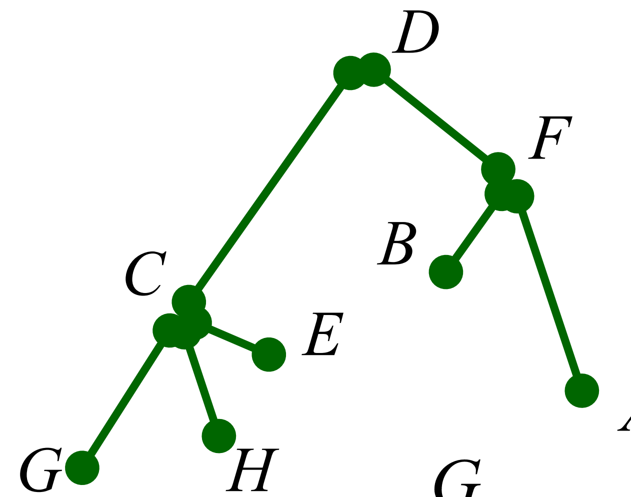
ПРИМЕРЫ ГРАФОВ



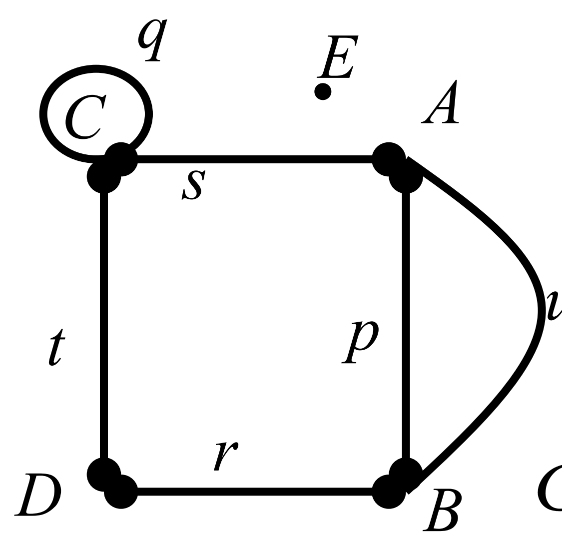
G_1



G_2

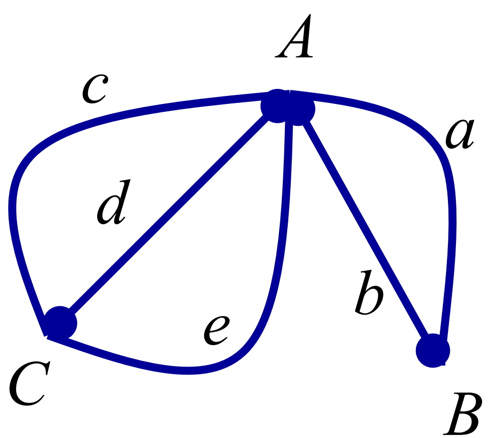


G_3



G_4

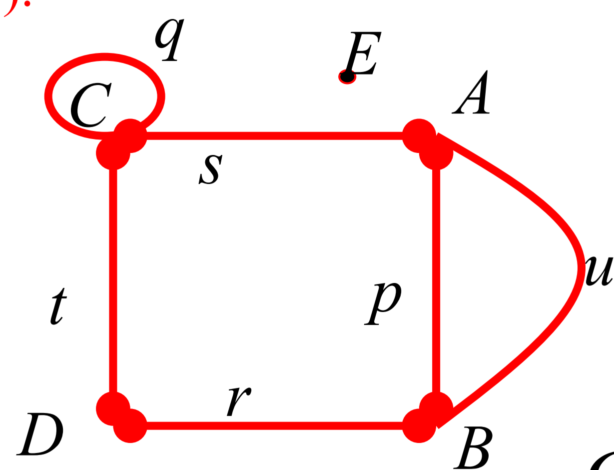
ЕСЛИ РЕБРО ГРАФА СОЕДИНЯЕТ ДВЕ ЕГО ВЕРШИНЫ, ТО ГОВОРЯТ, ЧТО ЭТО РЕБРО ИМ **ИНЦИДЕНТНО**. ДВЕ ВЕРШИНЫ ГРАФА НАЗЫВАЮТСЯ **СМЕЖНЫМИ**, ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ИНЦИДЕНТНОЕ ИМ РЕБРО.



G_1

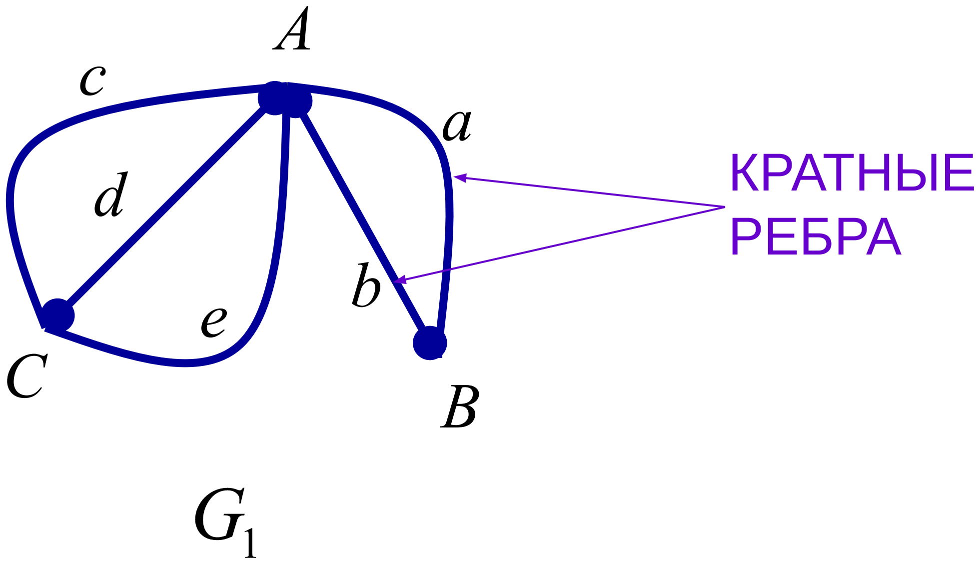
ЕСЛИ ГРАФ ИМЕЕТ РЕБРО, У КОТОРОГО НАЧАЛО И КОНЕЦ СОВПАДАЮТ, ТО ЭТО РЕБРО НАЗЫВАЕТСЯ **ПЕТЛЕЙ**(у графа G_2 петля – $q(C,C)$).

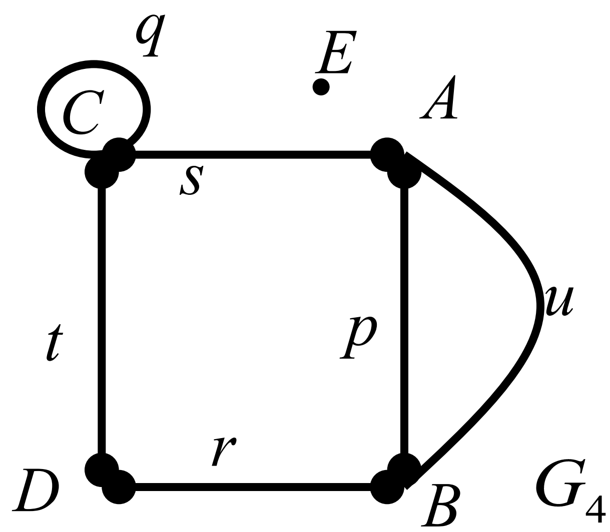
ДВА РЕБРА НАЗЫВАЮТСЯ **СМЕЖНЫМИ**, ЕСЛИ ОНИ ИМЕЮТ ОБЩУЮ ВЕРШИНУ.



G_2

У ГРАФА G_1 СМЕЖНЫМИ ЯВЛЯЮТСЯ ВЕРШИНЫ A и B, A и C; СМЕЖНЫМИ ЯВЛЯЮТСЯ РЕБРА c и d, a и b.





ЧИСЛО РЕБЕР, ИНЦИДЕНТНЫХ ВЕРШИНЕ *A*, НАЗЫВАЕТСЯ <u>СТЕПЕНЬЮ</u> ЭТОЙ ВЕРШИНЫ И ОБОЗНАЧАЕТСЯ $deg(A)$.

ЕСЛИ ВЕРШИНЕ ИНЦИДЕНТНА ПЕТЛЯ, ОНА ДАЕТ ВКЛАД В СТЕПЕНЬ, РАВНЫЙ ДВУМ, ТАК КАК ОБА КОНЦА ПРИХОДЯТ В ЭТУ ВЕРШИНУ.

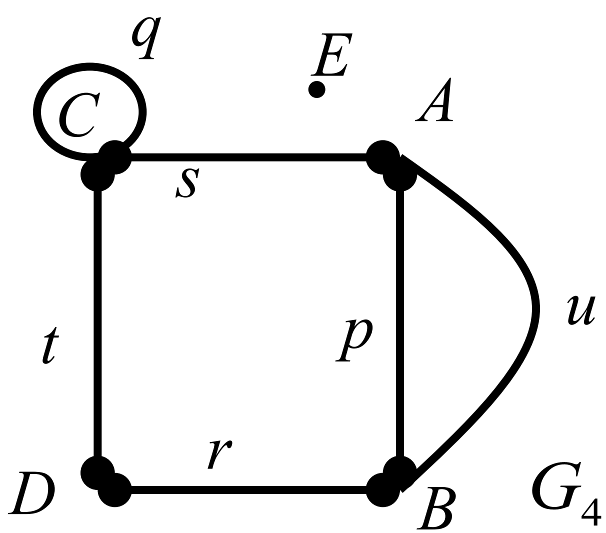
$deg(A) = 3$

$deg(B) = 3$

$deg(C) = 4$

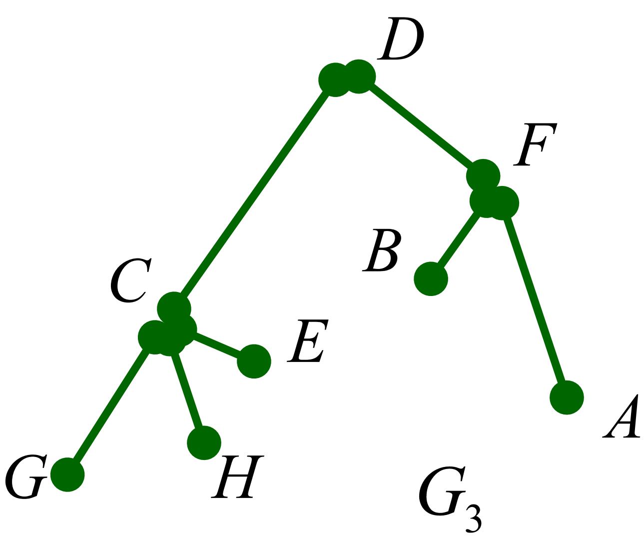
$deg(D) = 2$

$deg(E) = 0$



$deg(E) = 0$

E –
ИЗОЛИРОВАННАЯ
ВЕРШИНА



$$\left.\begin{aligned} deg(G) &= 1 \\ deg(H) &= 1 \\ deg(E) &= 1 \\ deg(B) &= 1 \\ deg(A) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

G, H, E, B, A
- ***ВИСЯЧИЕ***
ВЕРШИНЫ

ТЕОРЕМА *В ГРАФЕ G(V, X) СУММА СТЕПЕНЕЙ ВСЕХ ЕГО ВЕРШИН – ЧИСЛО ЧЕТНОЕ, РАВНОЕ УДВОЕННОМУ ЧИСЛУ РЕБЕР ГРАФА:*

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(V_i) = 2m$$

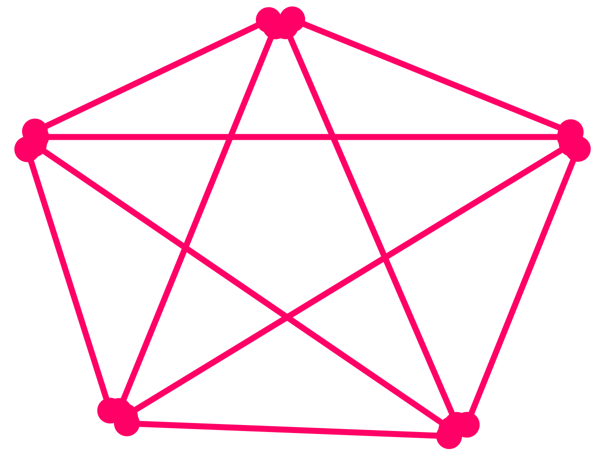
ВЕРШИНА НАЗЫВАЕТСЯ **ЧЕТНОЙ (НЕЧЕТНОЙ)**, ЕСЛИ ЕЕ СТЕПЕНЬ – ЧЕТНОЕ(НЕЧЕТНОЕ) ЧИСЛО.

ТЕОРЕМА *ЧИСЛО НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН ЛЮБОГО ГРАФА – ЧЕТНО.*

СЛЕДСТВИЕ НЕВОЗМОЖНО НАЧЕРТИТЬ ГРАФ

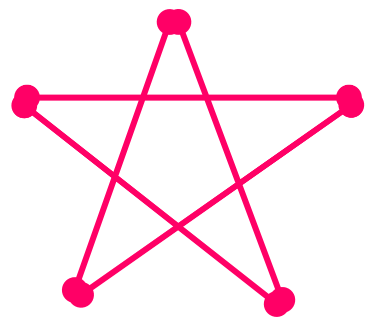
С НЕЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ НЕЧЕТНЫХ ВЕРШИН.

ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ **ПОЛНЫМ**, ЕСЛИ ЛЮБЫЕ ДВЕ ЕГО РАЗЛИЧНЫЕ ВЕРШИНЫ СОЕДИНЕНЫ ОДНИМ И ТОЛЬКО ОДНИМ РЕБРОМ.

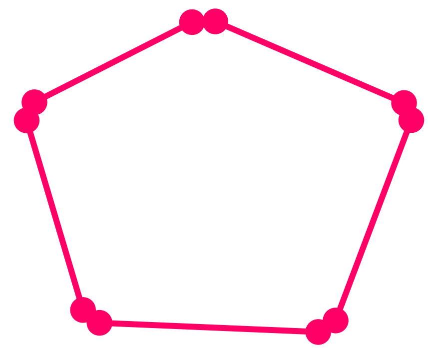


G_1

ДОПОЛНЕНИЕМ ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ГРАФ С ТЕМИ ЖЕ ВЕРШИНАМИ И ИМЕЮЩИЙ ТЕ И ТОЛЬКО ТЕ РЕБРА, КОТОРЫЕ НЕОБХОДИМО ДОБАВИТЬ К ИСХОДНОМУ ГРАФУ, ЧТОБЫ ОН СТАЛ ПОЛНЫМ.



G_2



ДОПОЛНЕНИЕ ГРАФА до полного графа

G_2

Проверочная работа № 1

Задание 1:

1. Построить граф, содержащий 5 вершин.

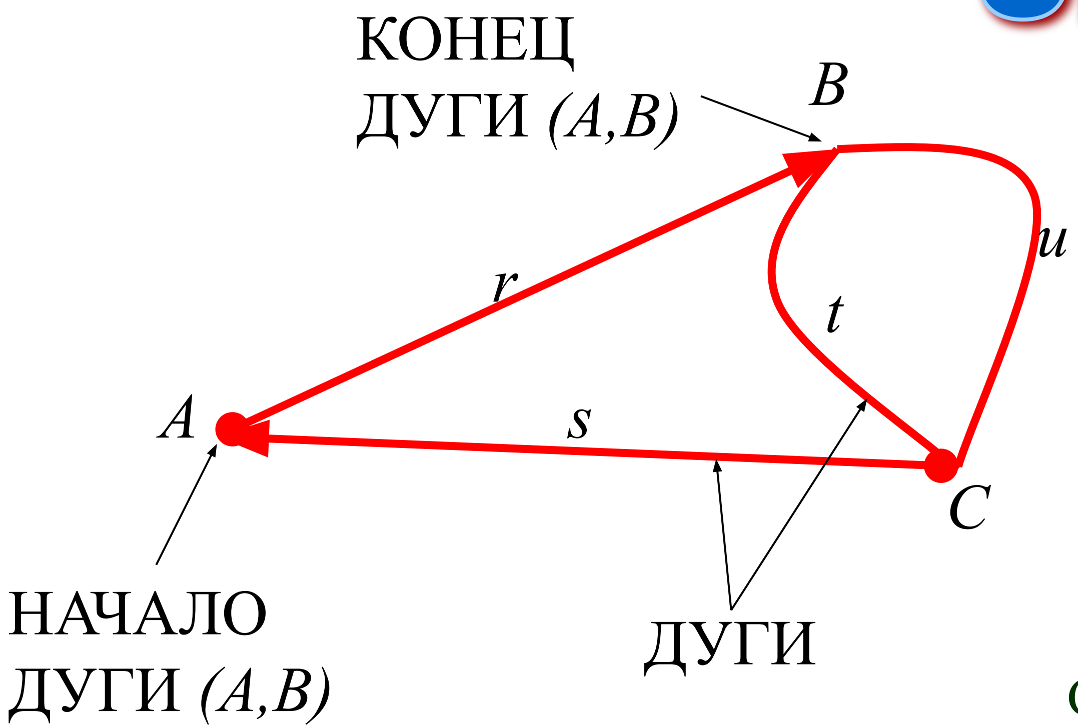
2. Записать:

1) Инцидентные рёбра;
2) Смежные вершины и рёбра, петлю;
3) Изолированные и висячие вершины;
4) Кратные рёбра;
5) Степень вершин.

ОРГРАФ

Ориентированный граф (кратко **орграф**) — граф, рёбрам которого присвоено направление. Направленные рёбра именуются также *дугами*.

ОРГРАФ



СТЕПЕНИ ВХОДА ВЕРШИН ГРАФА (*см. рис.*):

$$\deg_+(A) = 1$$

$$\deg_+(B) = 1$$

$$\deg_+(C) = 2$$

СТЕПЕНИ ВЫХОДА ВЕРШИН:

$$\deg_-(A) = 1$$

$$\deg_-(B) = 2$$

$$\deg_-(C) = 1$$

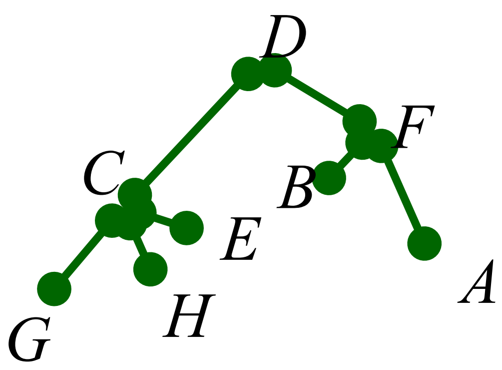
СТЕПЕНЬЮ ВХОДА (ВЫХОДА) ВЕРШИНЫ ОРГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ЧИСЛО РЕБЕР, ДЛЯ КОТОРЫХ ЭТА ВЕРШИНА ЯВЛЯЕТСЯ КОНЦОМ (НАЧАЛОМ).

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕБЕР НЕОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА, В КОТОРОЙ ВТОРАЯ ВЕРШИНА ПРЕДЫДУЩЕГО РЕБРА СОВПАДАЕТ С ПЕРВОЙ ВЕРШИНОЙ СЛЕДУЮЩЕГО, НАЗЫВАЕТСЯ **МАРШРУТОМ**.

ЧИСЛО РЕБЕР МАРШРУТА НАЗЫВАЕТСЯ **ДЛИНОЙ** МАРШРУТА.

ЕСЛИ НАЧАЛЬНАЯ ВЕРШИНА МАРШРУТА СОВПАДАЕТ С КОНЕЧНОЙ, ТО ТАКОЙ МАРШРУТ НАЗЫВАЕТСЯ **ЗАМКНУТЫМ** ИЛИ **ЦИКЛОМ**.

ЕСЛИ РЕБРО ВСТРЕТИЛОСЬ ТОЛЬКО ОДИН РАЗ, ТО МАРШРУТ НАЗЫВАЕТСЯ **ЦЕПЬЮ**.



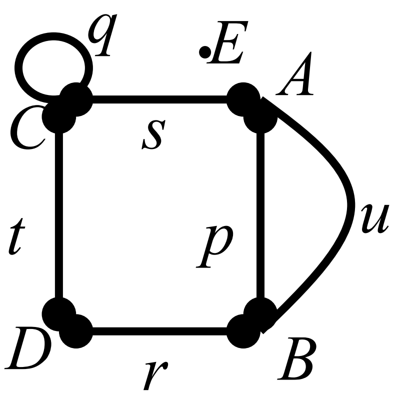
HCDFB – МАРШРУТ ДЛИНОЙ 4.

(t, s, p, r) – 4-цикл

(t, s, u, r, t, s, p, r) – 8-цикл

петля *(q)* – 1-цикл

(t, s, p) – 3-цепь

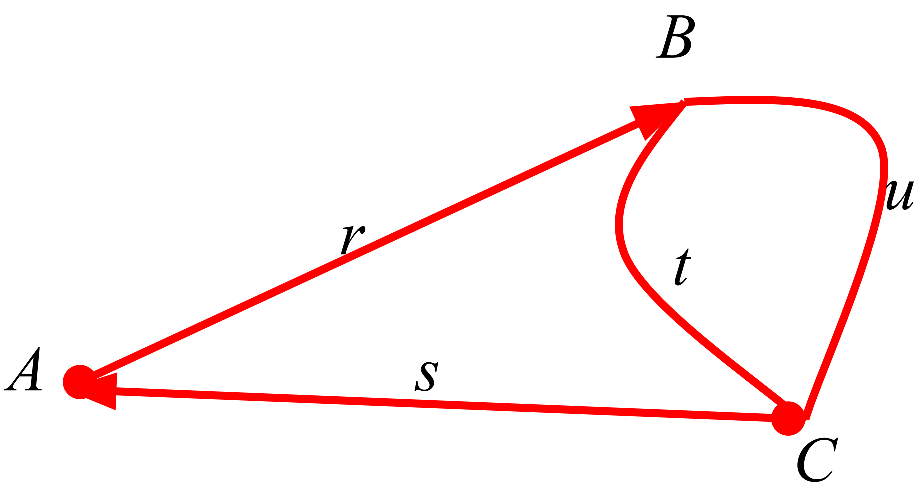


ПУТЬ – УПОРЯДОЧЕННАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РЕБЕР ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА, В КОТОРОЙ КОНЕЦ ПРЕДЫДУЩЕГО РЕБРА СОВПАДАЕТ С НАЧАЛОМ СЛЕДУЮЩЕГО И ВСЕ РЕБРА ЕДИНСТВЕННЫ.

(u, s, r, t) – 4-путь

(r, u) – 2-путь

(s, r, t) и *(u, s, r)* – 3-циклы



ЦИКЛ В ОРГРАФЕ – ПУТЬ, У КОТОРОГО СОВПАДАЮТ НАЧАЛО И КОНЕЦ.

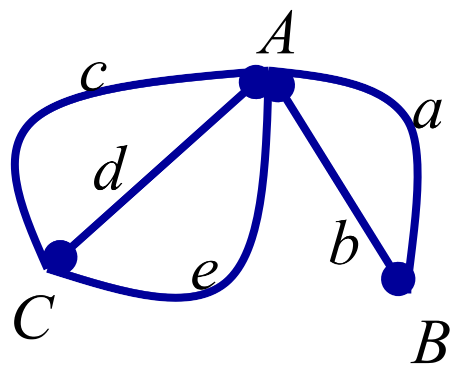
ЦЕПЬ, ПУТЬ И ЦИКЛ В ГРАФЕ НАЗЫВАЮТСЯ **ПРОСТЫМИ**, ЕСЛИ ОНИ ПРОХОДЯТ ЧЕРЕЗ ЛЮБУЮ ИЗ ВЕРШИН НЕ БОЛЕЕ ОДНОГО РАЗА.

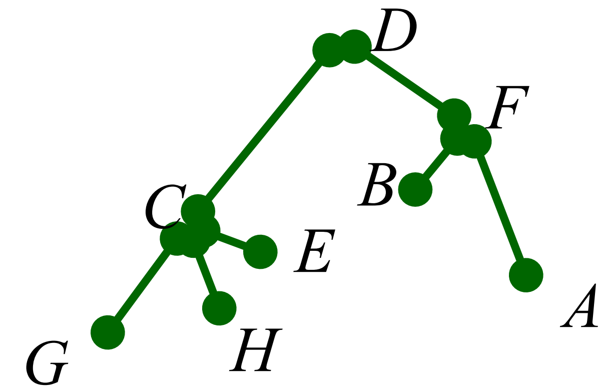
НЕОРИЕНТИРОВАННЫЙ ГРАФ НАЗЫВАЕТСЯ **СВЯЗНЫМ**, ЕСЛИ МЕЖДУ ЛЮБЫМИ ДВУМЯ ЕГО ВЕРШИНАМИ ЕСТЬ МАРШРУТ.

ТЕОРЕМА

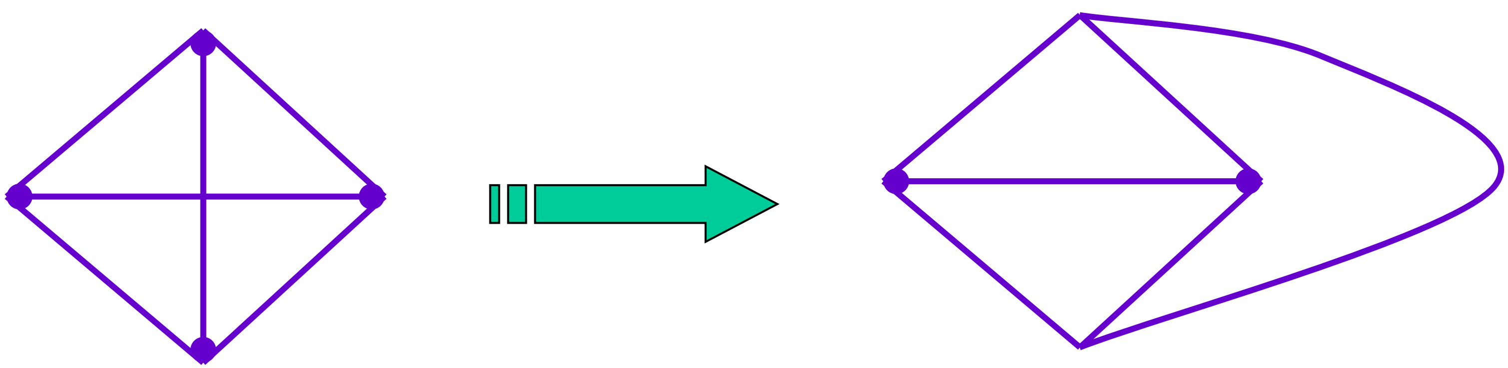
ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ СВЯЗНЫЙ ГРАФ ЯВЛЯЛСЯ ПРОСТЫМ ЦИКЛОМ, НЕОБХОДИМО И ДОСТАТОЧНО, ЧТОБЫ КАЖДАЯ ЕГО ВЕРШИНА ИМЕЛА СТЕПЕНЬ, РАВНУЮ 2.

ГРАФ G НАЗЫВАЕТСЯ **ПЛАНАРНЫМ(ПЛОСКИМ),** ЕСЛИ СУЩЕСТВУЕТ ТАКОЙ ГРАФ G', В ИЗОБРАЖЕНИИ КОТОРОГО НА ПЛОСКОСТИ РЕБРА ПЕРЕСЕКАЮТСЯ ТОЛЬКО В ВЕРШИНАХ.





ПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ



ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЙ

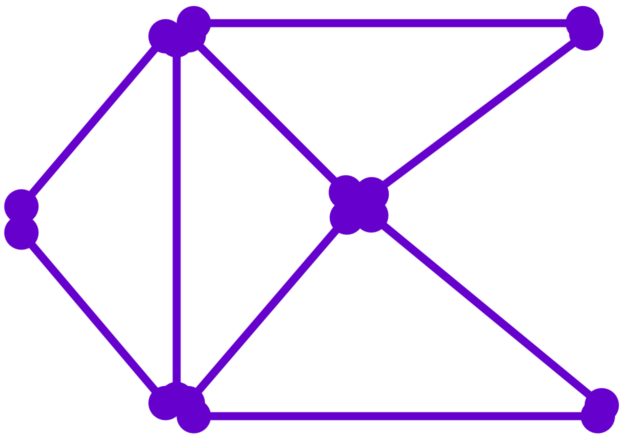
ИЗОБРАЖЕННЫЙ ИНАЧЕ

ЭЙЛЕРОВЫМ ПУТЕМ(ЦИКЛОМ) ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ(ЦИКЛ), КОТОРЫЙ СОДЕРЖИТ ВСЕ РЕБРА ГРАФА ТОЛЬКО ОДИН РАЗ.

ГРАФ, ОБЛАДАЮЩИЙ ЭЙЛЕРОВЫМ ЦИКЛОМ, НАЗЫВАЕТСЯ **ЭЙЛЕРОВЫМ**.

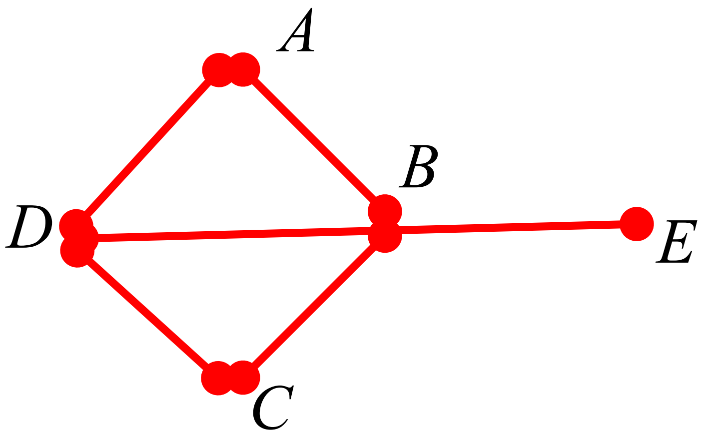
ТЕОРЕМА

ГРАФ ЯВЛЯЕТСЯ ЭЙЛЕРОВЫМ ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА ОН – СВЯЗНЫЙ ГРАФ, ИМЕЮЩИЙ ВСЕ ЧЕТНЫЕ ВЕРШИНЫ.



ГАМИЛЬТОНОВЫМ ПУТЕМ (ЦИКЛОМ) ГРАФА НАЗЫВАЕТСЯ ПУТЬ(ЦИКЛ), ПРОХОДЯЩИЙ ЧЕРЕЗ КАЖДУЮ ЕГО ВЕРШИНУ ТОЛЬКО ОДИН РАЗ.

ГРАФ, СОДЕРЖАЩИЙ ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ, НАЗЫВАЕТСЯ **ГАМИЛЬТОНОВЫМ**.



(C, D, A, B, E) – гамильтонов путь

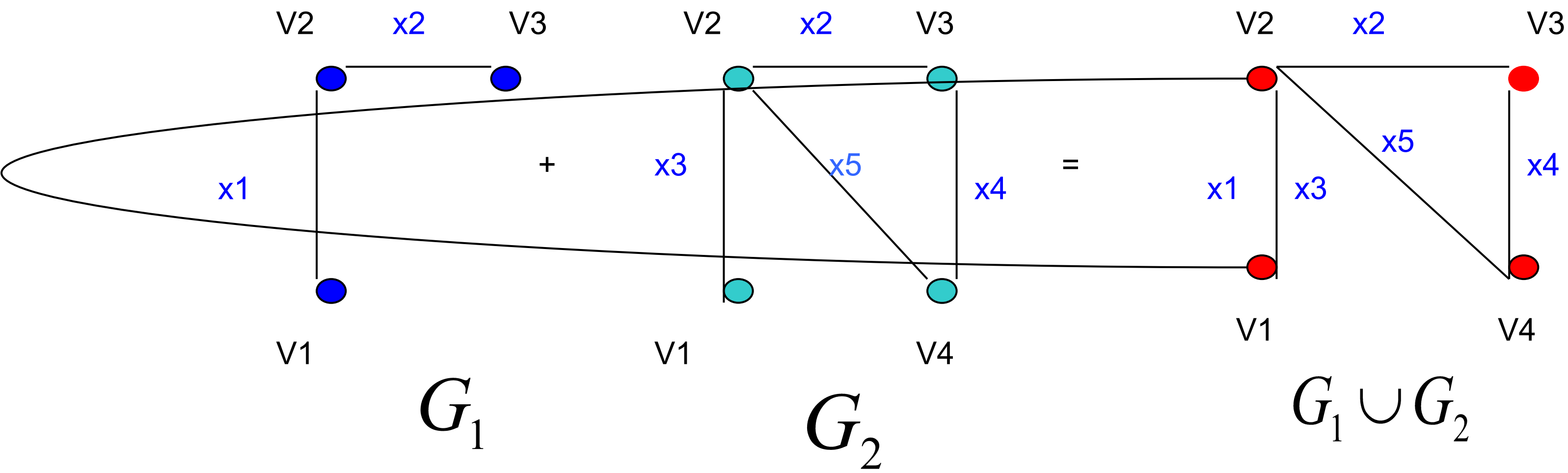
Операции над графами

1. Объединение.
2. Пересечение.
3. Кольцевая сумма.

Операции над графами: объединение графов

$$G(V,X) = G_1 \cup G_2$$

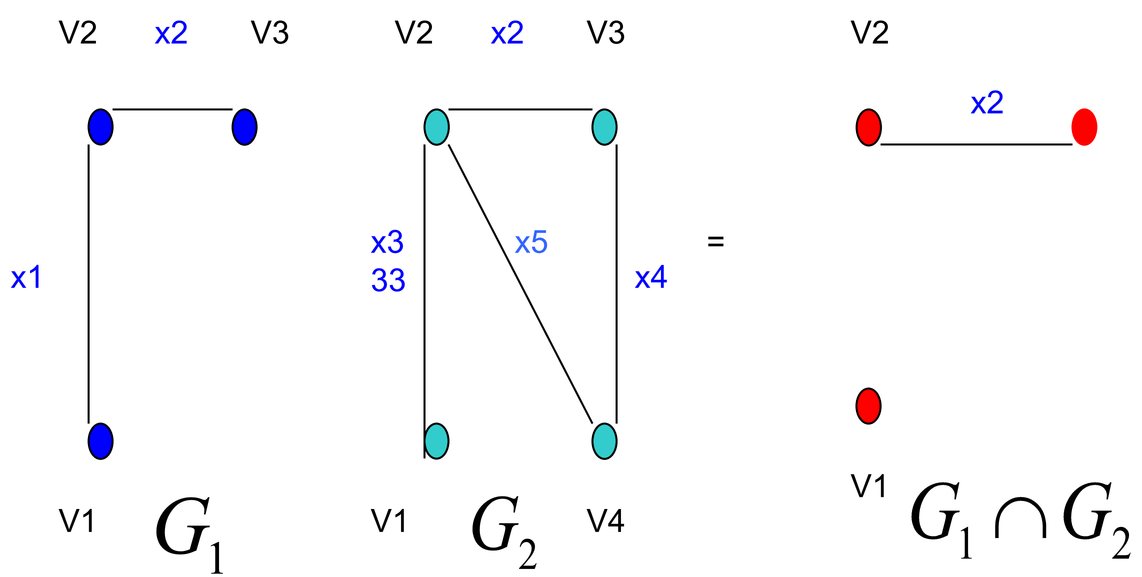
- Объединение графов $G_1(V_1, X_1)$ и $G_2(V_2, X_2)$ - это новый граф $G(V,X) = G_1 \cup G_2$, у которого множество вершин $V = V_1 \cup V_2$, а множество ребер $X = X_1 \cup X_2$:



Операции над графами:
пересечение графов

$$G(V, X) = G_1 \cap G_2$$

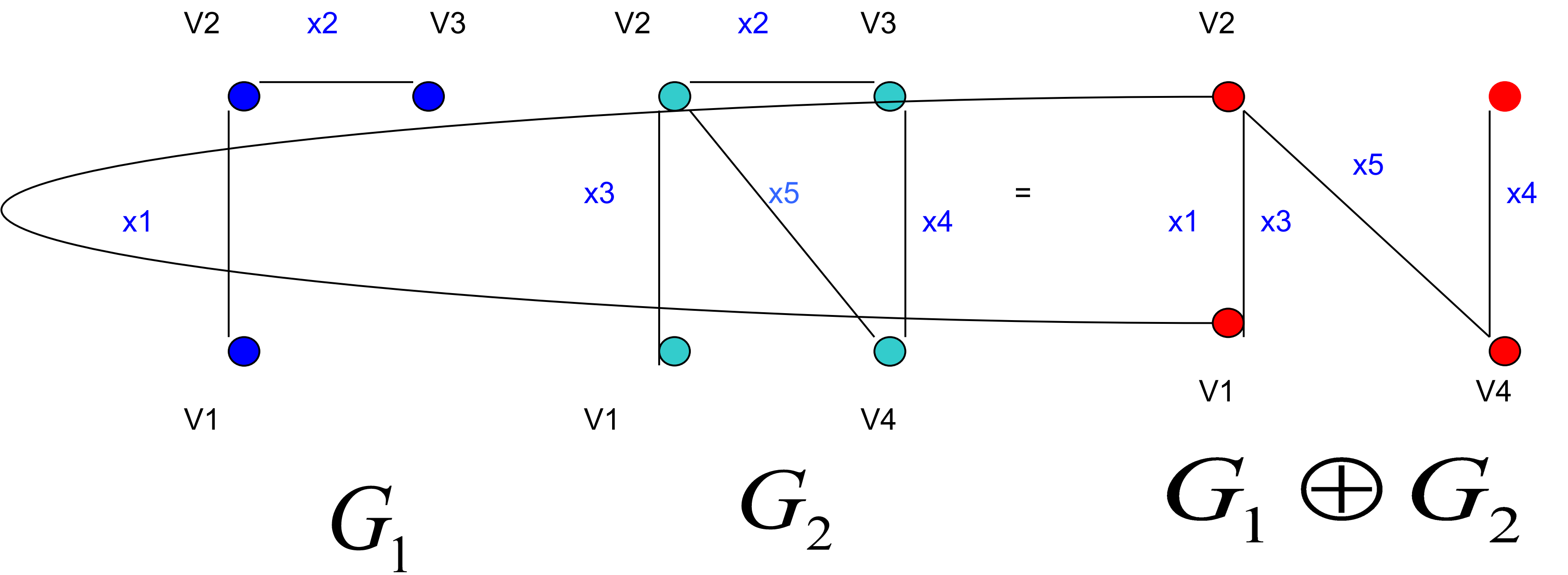
- Пересечение графов G_1 и G_2 - это граф, для которого $V = V_1 \cap V_2$ - множество вершин, а $X = X_1 \cap X_2$ - множество ребер



Кольцевая сумма графов G_1 и G_2 это граф

$$G(V,X) = G_1 \oplus G_2,\ V = V_1 \cup V_2,$$

$$X = (X_1 \cup X_2) \setminus (X_1 \cap X_2)$$



Проверочная работа № 2

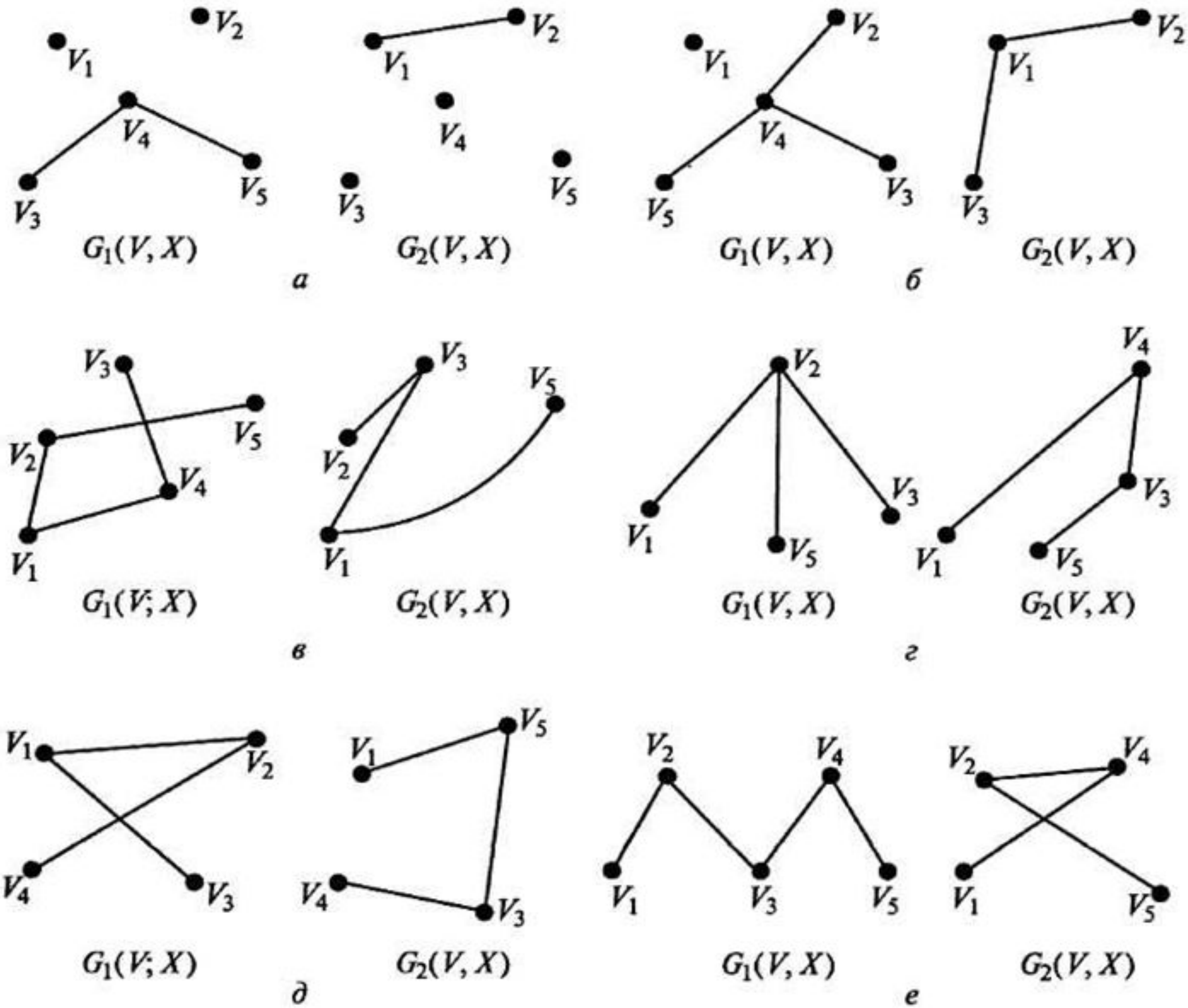
Выбрать вариант(а-е) из расчёта шести вариантов в соответствии со списком ЭЖ.

Задание: Найти объединение, пересечение и кольцевую сумму графов G_1 и G_2, дополнение для графа G_1.

Объединением графов $G_1 = (V_1, X_1)$ и $G_2 = (V_2, X_2)$ называется граф $G = G_1 \cup G_2$, множество вершин которого $V = V_1 \cup V_2$, а множество ребер $X = X_1 \cup X_2$.

Пересечением графов G_1 и G_2 называется граф $G = G_1 \cap G_2$, для которого $X = X_1 \cap X_2$ - множество ребер, а $V = V_1 \cap V_2$ — множество вершин.

Кольцевой суммой двух графов называется граф $G = G_1 \oplus G_2$, порожденный множеством вершин $V = V_1 \cup V_2$ и множеством ребер $(X_1 \cup X_2) \setminus (X_1 \cap X_2)$, т.е. множеством ребер, содержащихся либо в G_1 либо в G_2, но не в $G_1 \cap G_2$.


V_1 V_2 V_3 V_4 V_5
$G_1(V, X)$
V_1 V_2 V_3 V_4 V_5
$G_2(V, X)$
а
V_1 V_2 V_3 V_4 V_5
$G_1(V, X)$
V_1 V_2 V_3
$G_2(V, X)$
б
V_1 V_2 V_3 V_4 V_5
$G_1(V; X)$
V_1 V_2 V_3 V_5
$G_2(V, X)$
в
V_1 V_2 V_3 V_5
$G_1(V, X)$
V_1 V_3 V_4 V_5
$G_2(V, X)$
г
V_1 V_2 V_3 V_4
$G_1(V; X)$
V_1 V_3 V_4 V_5
$G_2(V, X)$
д
V_1 V_2 V_3 V_4 V_5
$G_1(V, X)$
V_1 V_2 V_4 V_5
$G_2(V, X)$
е