

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Лекция 14.

**Конечно-разностные методы
решения систем уравнений,
описывающих нестационарные
режимы работы двухпоточного
противоточного теплообменника.**



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT_1}{d\tau} + a \frac{dT_1}{dx} = b_1 (T_{\text{CT}} - T_1) \\ \frac{dT_{\text{CT}}}{d\tau} = \beta_1 (T_1 - T_{\text{CT}}) + \beta_2 (T_2 - T_{\text{CT}}) \\ \frac{dT_2}{d\tau} - a_2 \frac{dT_2}{dx} = b_2 (T_{\text{CT}} - T_2) \end{array} \right.$$

▣ **Начальные условия:**

$$T_1 \Big|_{\tau=0} = T_1^0(x) \quad T_2 \Big|_{\tau=0} = T_2^0(x)$$

$$T_{\text{ст}} \Big|_{\tau=0} = T_{\text{ст}}^0(x)$$

**Граничные условия общего вида
будут иметь следующий вид:**

$$k_1(\tau) = m_1(\tau)T_1(\tau,0) + m_3(\tau)T_1(\tau,1) + m_5(\tau)T_2(\tau,0) + m_7(\tau)T_2(\tau,1)$$

$$k_2(\tau) = m_2(\tau)T_1(\tau,0) + m_4(\tau)T_1(\tau,1) + m_6(\tau)T_2(\tau,0) + m_8(\tau)T_2(\tau,1)$$

Явная конечно-разностная схема имеет

ВИД:

$$\frac{T_{1,i}^{j+1} - T_{1,i}^j}{\Delta \tau} + a_{1,i-1}^j \frac{T_{1,i}^j - T_{1,i-1}^j}{\Delta x} = b_{1,i-1}^j (T_{cm,i-1}^j - T_{1,i-1}^j),$$

$$i = 2, \dots, n+1$$

$$\frac{T_{cm,i}^{j+1} - T_{cm,i}^j}{\Delta \tau} = \beta_{1,i}^j (T_{1,i}^j - T_{cm,i}^j) + \beta_{2,i}^j (T_{2,i}^j - T_{cm,i}^j), \quad i = 1, \dots, n+1$$

$$\frac{T_{2,i}^{j+1} - T_{2,i}^j}{\Delta \tau} - a_{2,i+1}^j \frac{T_{2,i+1}^j - T_{2,i}^j}{\Delta x} = b_{2,i+1}^j (T_{cm,i+1}^j - T_{2,i+1}^j),$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$j = 1, \dots, m$$

Граничное условие:

$$k_1^j = m_{1,1}^j T_{1,1}^j + m_{3,1,n+1}^j T_{1,n+1}^j + m_{5,2,1}^j T_{2,1}^j + m_{7,2,n+1}^j T_{2,n+1}^j$$

$$k_2^j = m_{2,1,1}^j T_{1,1}^j + m_{4,1,n+1}^j T_{1,n+1}^j + m_{6,2,1}^j T_{2,1}^j + m_{8,2,n+1}^j T_{2,n+1}^j$$

$$j = 1, \dots, m + 1$$

Начальные условия:

$$T_{1,i}^1 = T_1^0(x_i), \quad T_{2,i}^1 = T_2^0(x_i)$$

$$T_{cm,i}^1 = T_{cm}^0(x_i), \quad i = 1, \dots, n + 1$$

Схема устойчива при выполнении условия:

$$\frac{\|a\| \Delta \tau}{\Delta x} \leq 1$$

$$\|a\| = \max(|a_{1,i}^j|, |a_{2,i}^j|)$$

Погрешность аппроксимации первого порядка: $O(\Delta x) + O(\Delta \tau)$

Из конечно-разностных уравнений
получаются следующие выражения для
определения неизвестных значений
температур потока и стенки:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{1,i}^{j+1} = T_{1,i}^j + \Delta\tau \left[b_{1,i-1}^j (T_{cm,i-1}^j - T_{1,i-1}^j) - a_{1,i-1}^j \frac{T_{1,i}^j - T_{1,i-1}^j}{\Delta x} \right], \\ \\ T_{cm,i}^{j+1} = T_{cm,i}^j + \\ + \Delta\tau \left[\beta_{1,i-1}^j (T_{1,i}^j - T_{cm,i}^j) + \beta_{2,i}^j (T_{2,i}^j - T_{cm,i}^j) \right] \\ \\ T_{2,i}^{j+1} = T_{2,i+1}^j + \Delta\tau \left[b_{2,i+1}^j (T_{cm,i+1}^j - T_{2,i+1}^j) + a_{2,i+1}^j \frac{T_{2,i+1}^j - T_{2,i}^j}{\Delta x} \right] \end{array} \right.$$

Неявная конечно-разностная схема

имеет вид:

$$\frac{T_{1,i}^{j+1} - T_{1,i}^j}{\Delta\tau} + a_{1,i-1}^j \frac{T_{1,i}^{j+1} - T_{1,i-1}^{j+1}}{\Delta x} = b_{1,i-1}^j (T_{cm,i-1}^{j+1} - T_{1,i-1}^{j+1}),$$

$$i = 2, \dots, n+1$$

$$\frac{T_{cm,i}^{j+1} - T_{cm,i}^j}{\Delta\tau} = \beta_{1,i}^j (T_{1,i}^{j+1} - T_{cm,i}^{j+1}) + \beta_{2,i}^j (T_{2,i}^{j+1} - T_{cm,i}^{j+1}), i = 1, \dots, n+1$$

$$\frac{T_{2,i}^{j+1} - T_{2,i}^j}{\Delta\tau} - a_{2,i+1}^j \frac{T_{2,i+1}^{j+1} - T_{2,i}^{j+1}}{\Delta x} = b_{2,i+1}^j (T_{cm,i+1}^{j+1} - T_{2,i+1}^{j+1}),$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$j = 1, \dots, m$$

В случае независимых граничных условий:

$$T_1(0) = T_{10} \quad T_2(1) = T_{20}$$

т.е. известных значений

$$T_{1,1}^j = T_{10}^j, \quad T_{2,n+1}^j = T_{20}^j$$

$$j = 1, \dots, m + 1$$

преобразовывая:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{1,i}^{j+1} \left(\frac{1}{\Delta\tau} + \frac{a_{1,i-1}^j}{\Delta x} \right) + T_{1,i-1}^{j+1} \left(b_{1,i-1}^j - \frac{a_{1,i-1}^j}{\Delta x} \right) = T_{1,i}^j \frac{1}{\Delta\tau} + b_{1,i-1}^j T_{cm,i-1}^{j+1} \\ T_{cm,i}^{j+1} \left(\frac{1}{\Delta\tau} + \beta_{1,i}^j + \beta_{2,i}^j \right) = T_{cm,i}^j \left(\frac{1}{\Delta\tau} \right) + \beta_{1,i}^j T_{1,i}^{j+1} + \beta_{2,i}^j T_{2,i}^{j+1} \\ T_{2,i}^{j+1} \left(\frac{1}{\Delta\tau} - \frac{a_{2,i+1}^j}{\Delta x} \right) + T_{2,i+1}^{j+1} \left(b_{2,i+1}^j + \frac{a_{2,i+1}^j}{\Delta x} \right) = T_{2,i}^j \frac{1}{\Delta\tau} + b_{2,i+1}^j T_{cm,i+1}^{j+1} \end{array} \right.$$

преобразовывая:

$$\left\{ \begin{aligned} T_{1,i}^{j+1}(\Delta x + a_{1,i-1}^j \Delta \tau) + T_{1,i-1}^{j+1}(b_{1,i-1}^j \Delta x - a_{1,i-1}^j \Delta \tau) &= \\ &= T_{1,i}^j(\Delta x) + (\Delta x \Delta \tau b_{1,i-1}^j) T_{cm,i-1}^{j+1} \\ T_{cm,i}^{j+1}(1 + \Delta \tau(\beta_{1,i}^j + \beta_{2,i}^j)) &= \\ &= T_{cm,i}^j + (\Delta \tau \beta_{1,i}^j) T_{1,i}^{j+1} + (\Delta \tau \beta_{2,i}^j) T_{2,i}^{j+1} \\ T_{2,i}^{j+1}(\Delta x - a_{2,i+1}^j \Delta \tau) + T_{2,i+1}^{j+1}(b_{2,i+1}^j \Delta x + a_{2,i+1}^j \Delta \tau) &= \\ &= T_{2,i}^j(\Delta x) + (\Delta x \Delta \tau b_{2,i+1}^j) T_{cm,i+1}^{j+1} \end{aligned} \right.$$

Из конечно-разностного аналога уравнения энергетического баланса для стенки выражается:

$$T_{cm,i-1}^{j+1} = \frac{T_{cm,i-1}^j + (\Delta\tau\beta_{1,i-1}^j)T_{1,i-1}^{j+1} + (\Delta\tau\beta_{2,i-1}^j)T_{2,i-1}^{j+1}}{1 + \Delta\tau(\beta_{1,i-1}^j + \beta_{2,i-1}^j)}$$

$$T_{cm,i+1}^{j+1} = \frac{T_{cm,i+1}^j + (\Delta\tau\beta_{1,i+1}^j)T_{1,i+1}^{j+1} + (\Delta\tau\beta_{2,i+1}^j)T_{2,i+1}^{j+1}}{1 + \Delta\tau(\beta_{1,i+1}^j + \beta_{2,i+1}^j)}$$

Подставляя в конечно-разностные уравнения теплового баланса потоков:

$$\left\{ \begin{aligned} & T_{1,i}^{j+1} (\Delta x + a_{1,i-1}^j \Delta \tau) + T_{1,i-1}^{j+1} (b_{1,i-1}^j \Delta x - a_{1,i-1}^j \Delta \tau) = \Delta x T_{1,i}^j + \\ & + (\Delta x \Delta \tau b_{1,i-1}^j) \frac{T_{cm,i-1}^j + (\Delta \tau \beta_{1,i-1}^j) T_{1,i-1}^{j+1} + (\Delta \tau \beta_{2,i-1}^j) T_{2,i-1}^{j+1}}{1 + \Delta \tau (\beta_{1,i-1}^j + \beta_{2,i-1}^j)} \\ & T_{2,i}^{j+1} (\Delta x - a_{2,i+1}^j \Delta \tau) + T_{2,i+1}^{j+1} (b_{2,i+1}^j \Delta x + a_{2,i+1}^j \Delta \tau) = \Delta x T_{2,i}^j + \\ & + (\Delta x \Delta \tau b_{2,i+1}^j) \frac{T_{cm,i+1}^j + (\Delta \tau \beta_{1,i+1}^j) T_{1,i+1}^{j+1} + (\Delta \tau \beta_{2,i+1}^j) T_{2,i+1}^{j+1}}{1 + \Delta \tau (\beta_{1,i+1}^j + \beta_{2,i+1}^j)} \end{aligned} \right.$$

После преобразований получается:

$$\begin{aligned} & \left(b_{1,i-1}^j \Delta x - a_{1,i-1}^j \Delta \tau - \frac{(\Delta x \Delta \tau^2 b_{1,i-1}^j \beta_{1,i-1}^j)}{1 + \Delta \tau (\beta_{1,i-1}^j + \beta_{2,i-1}^j)} \right) T_{1,i-1}^{j+1} - \\ & (\Delta x - a_{2,i+1}^j \Delta \tau) T_{2,i}^{j+1} - \left(\frac{\Delta x \Delta \tau^2 b_{2,i+1}^j \beta_{1,i+1}^j}{1 + \Delta \tau (\beta_{1,i+1}^j + \beta_{2,i+1}^j)} \right) T_{1,i+1}^{j+1} + \\ & + \left(b_{2,i+1}^j \Delta x + a_{2,i+1}^j \Delta \tau + \frac{\Delta x \Delta \tau^2 b_{2,i+1}^j \beta_{2,i+1}^j}{1 + \Delta \tau (\beta_{1,i+1}^j + \beta_{2,i+1}^j)} \right) T_{2,i+1}^{j+1} = \\ & = - \left(- \Delta x T_{2,i}^j - \frac{\Delta x \Delta \tau b_{2,i+1}^j}{1 + \Delta \tau (\beta_{1,i+1}^j + \beta_{2,i+1}^j)} T_{cm,i+1}^j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(b_{1,i-1}^j \Delta x - a_{1,i-1}^j \Delta \tau - \frac{(\Delta x \Delta \tau^2 b_{1,i-1}^j \beta_{1,i-1}^j)}{1 + \Delta \tau (\beta_{1,i-1}^j + \beta_{2,i-1}^j)} \right) T_{1,i-1}^{j+1} - \\
& (\Delta x - a_{2,i+1}^j \Delta \tau) T_{2,i}^{j+1} - \left(\frac{\Delta x \Delta \tau^2 b_{2,i+1}^j \beta_{1,i+1}^j}{1 + \Delta \tau (\beta_{1,i+1}^j + \beta_{2,i+1}^j)} \right) T_{1,i+1}^{j+1} + \\
& + \left(b_{2,i+1}^j \Delta x + a_{2,i+1}^j \Delta \tau + \frac{\Delta x \Delta \tau^2 b_{2,i+1}^j \beta_{2,i+1}^j}{1 + \Delta \tau (\beta_{1,i+1}^j + \beta_{2,i+1}^j)} \right) T_{2,i+1}^{j+1} = \\
& = - \left(-\Delta x T_{2,i}^j - \frac{\Delta x \Delta \tau b_{2,i+1}^j}{1 + \Delta \tau (\beta_{1,i+1}^j + \beta_{2,i+1}^j)} T_{cm,i+1}^j \right)
\end{aligned}$$

В результате, с учётом независимых граничных условий получается система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix}
 X & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 X & X & X & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & X & X & X & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & X & X & X & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & X & X & X & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & X & X & X & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & X & X & X & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 T_{1,1}^{j+1} \\
 T_{2,1}^{j+1} \\
 T_{1,2}^{j+1} \\
 T_{2,2}^{j+1} \\
 \dots \\
 T_{1,n}^{j+1} \\
 T_{2,n}^{j+1} \\
 T_{1,n+1}^{j+1} \\
 T_{2,n+1}^{j+1}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 X \\
 X \\
 X \\
 X \\
 \dots \\
 X \\
 X \\
 X \\
 X
 \end{pmatrix}$$

Данная система решается с помощью метода прогонки на каждом шаге по времени.

Если заданы граничные условия общего вида, то решение системы линейных алгебраических уравнений получается общими матричными методами.

**СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ!**