ФИЗИКА

Преподаватель:
Татьяна Юрьевна Истомина

Кинематика

Занимается описанием движения тел в пространстве с течением времени без объяснения причин движения

Свойства пространства

- Непрерывность
- Однородность
- Изотропность
- Евклидовость
- Трехмерность

Свойства времени

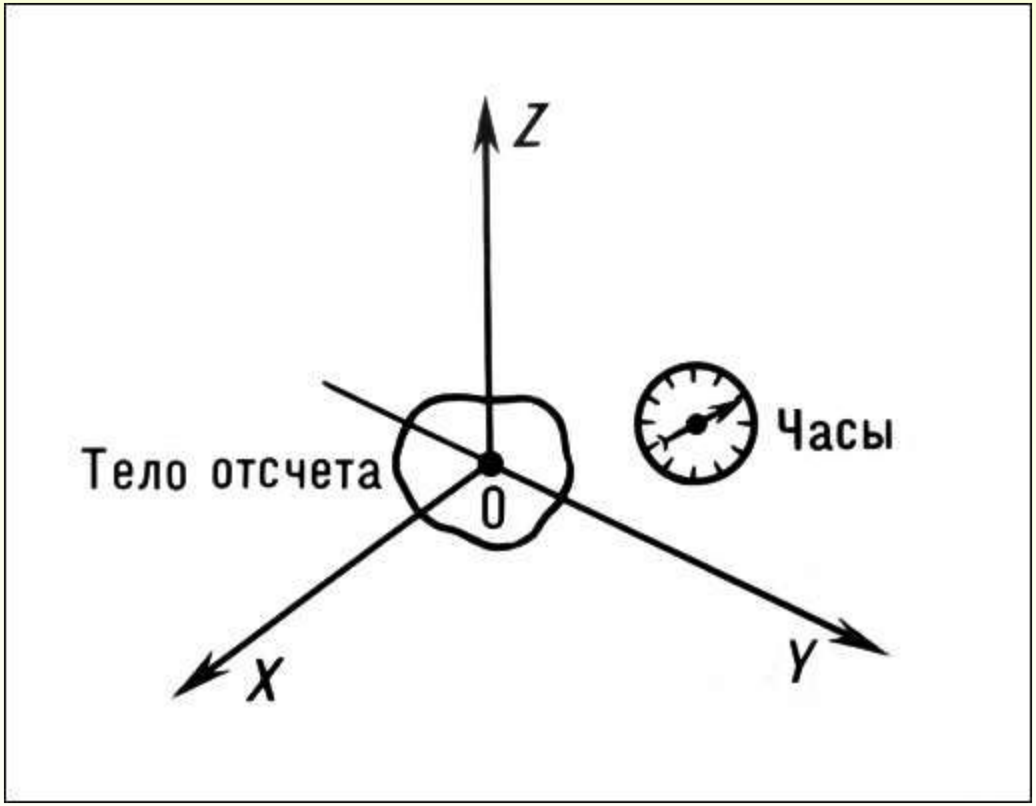
- Непрерывность
- Однородность
- Однонаправленность

Задача кинематики – знать положение тела в пространстве в любой момент времени.

Материальная точка (МТ) – тело, размерами и формой которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями до других тел.

Основные понятия

Система отсчета

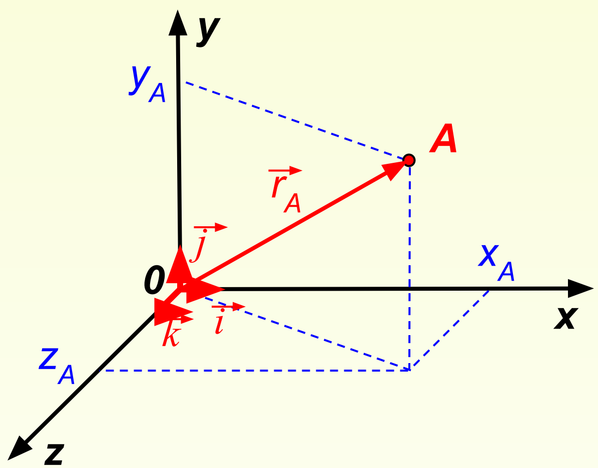


- Тело отсчета
- Система координат
- Прибор для отсчета времени (часы)

Основные понятия

Радиус-вектор материальной точки в декартовой системе координат (ДСК)

$$\vec{r}_A = \{x_A, y_A, z_A\}$$



$$\vec{i} = \{1,0,0\}; \quad \vec{j} = \{0,1,0\}; \quad \vec{k} = \{0,0,1\}$$

- ортонормированный базис ДСК

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$$\boxed{\vec{r}_A = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}}$$

$$\boxed{|\vec{r}_A| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}}$$

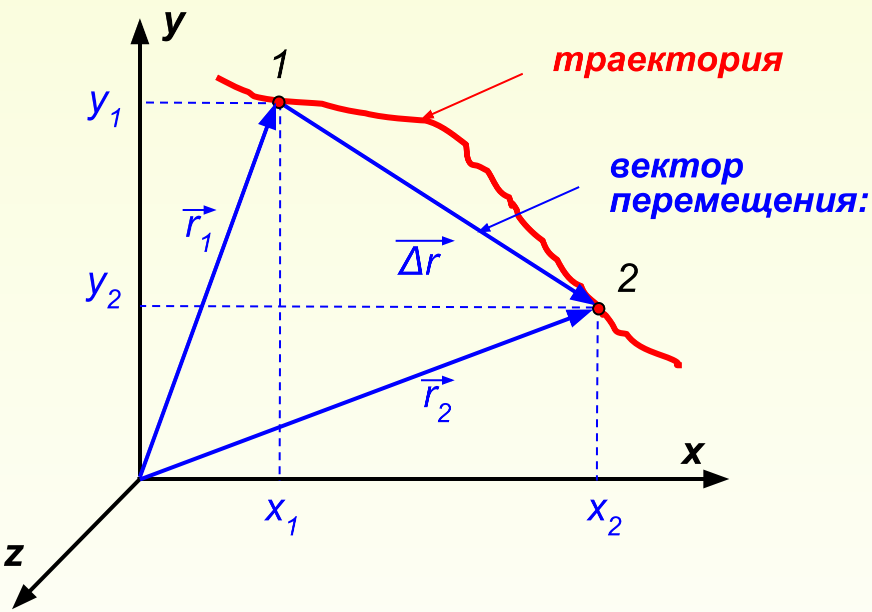
Радиус-вектор – вектор, проведенный из начала координат в точку наблюдения

Траектория, путь и вектор перемещения МТ

Траектория – линия, которую описывает точечное тело при движении в пространстве

Уравнение траектории – зависимость одной координаты от другой, например - y(x)

Путь - длина траектории за время наблюдения



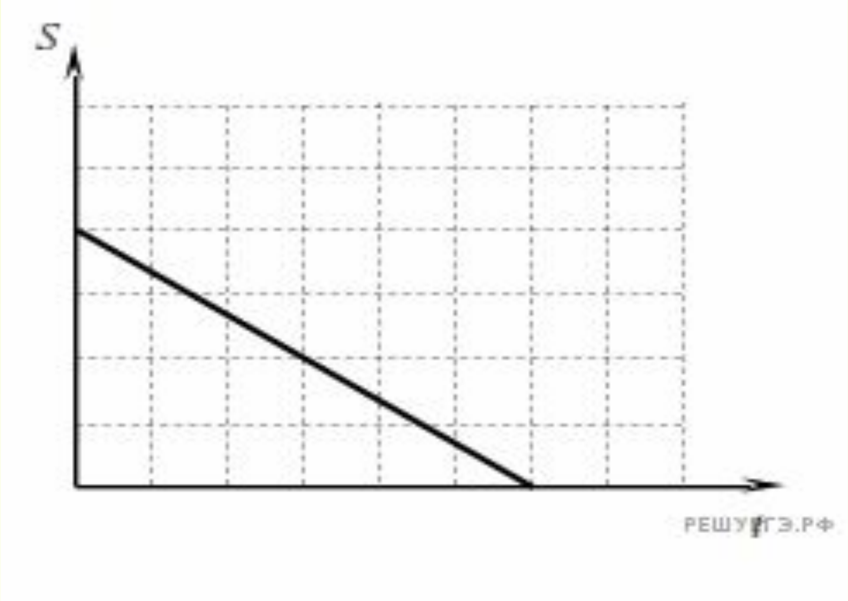
$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$$

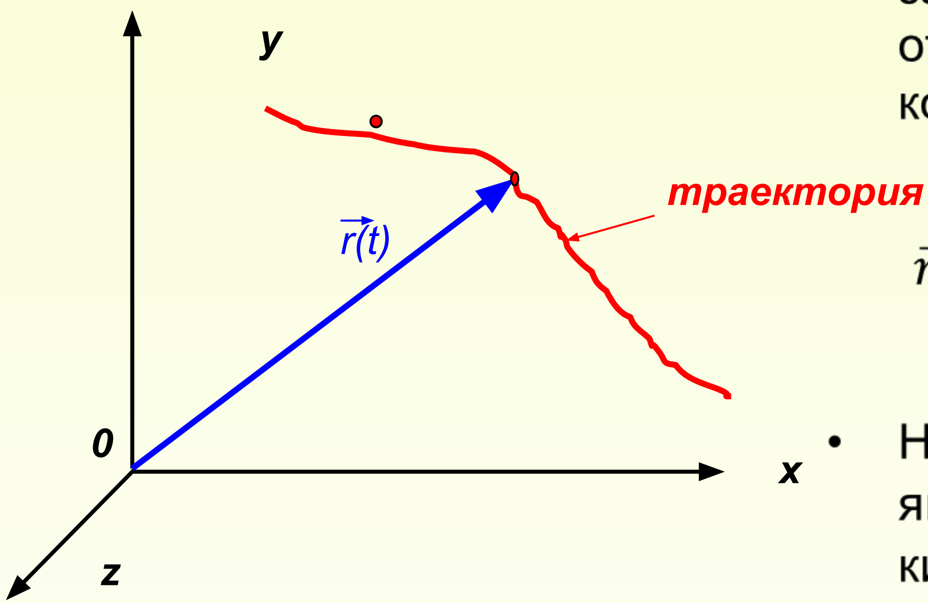
Перемещение – вектор, проведенный из начального положения материальной точки в конечное положение на траектории.

- Может ли график зависимости пути от времени иметь следующий вид?



- 1) да
- 2) нет
- 3) может, если траектория прямолинейная
- 4) может, если тело возвращается в исходную точку

Закон движения МТ



- Закон движения – зависимость радиус-вектора от времени или зависимость координат от времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

- Нахождение закона движения является решением задачи кинематики

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}}$$

– закон движения материальной точки

Скорость

- Среднее значение модуля вектора скорости — скалярная величина, равная отношению пройденного пути к промежутку времени за который этот путь был пройден.

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

- Среднее значение вектора скорости - векторная величина, равная отношению перемещения к промежутку времени за который это перемещение было совершено.

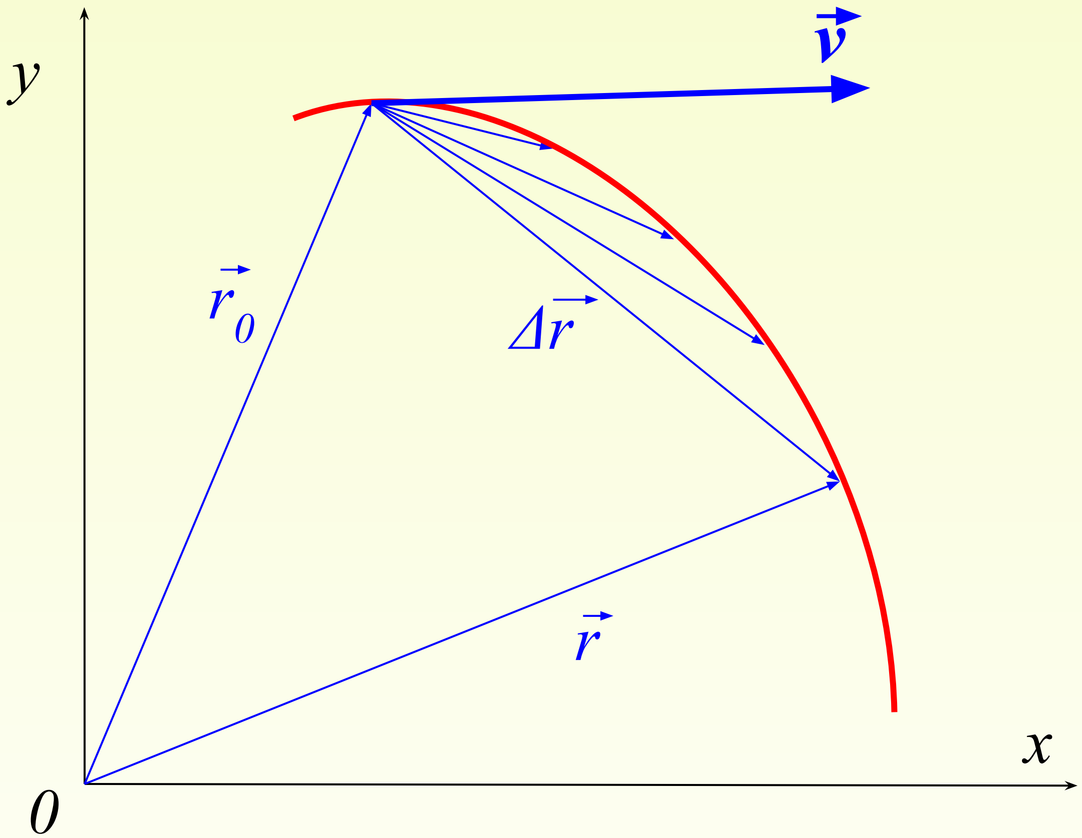
$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

- Мгновенная скорость — векторная физическая величина, равная пределу отношения перемещения тела к промежутку времени, в течение которого это перемещение произошло:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

- Мгновенная скорость тела всегда направлена по касательной к траектории в сторону движения тела
- Единица измерения скорости в СИ — метр в секунду (м/с).

Мгновенная скорость



$$\vec{v} \sim \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

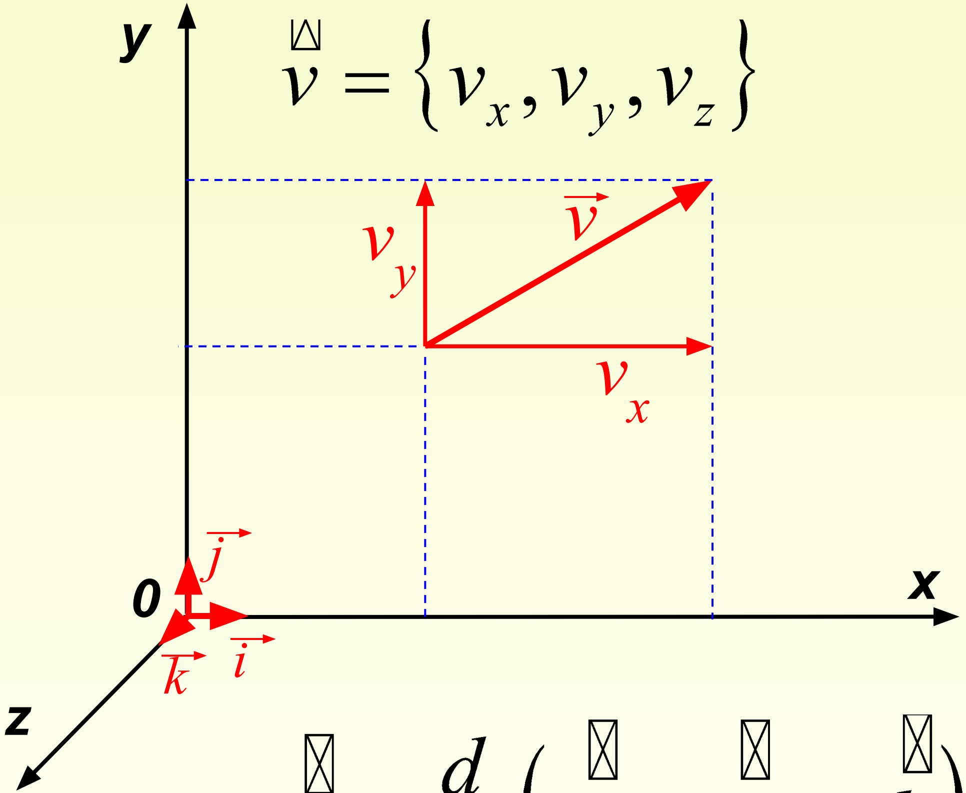
$$\Delta t \to 0$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Выражение вектора скорости в декартовой системе координат

$$\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$$



$$\boxed{\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}}$$

$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt};\ v_y = \frac{dy}{dt};\ v_z = \frac{dz}{dt}}$$

$$\boxed{v_x = \dot{x};\ v_y = \dot{y};\ v_z = \dot{z}}$$

Ускорение

- Ускорение (мгновенное) – векторная физическая величина, равная отношению изменения скорости тела к малому промежутку времени, в течение которого это изменение произошло:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \overrightarrow{\frac{dv}{dt}} = \dot{\vec{v}} = \overrightarrow{\frac{d^2 r}{dt^2}} = \ddot{\vec{r}}$$

- Ускорение показывает быстроту изменения скорости с течением времени
- **Единица измерения ускорения в СИ**

метр в секунду за секунду $\left(\frac{\text{м/с}}{\text{с}}\right)$ или метр на секунду в квадрате (м/с^2)

- Выражение ускорения в ДСК $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$

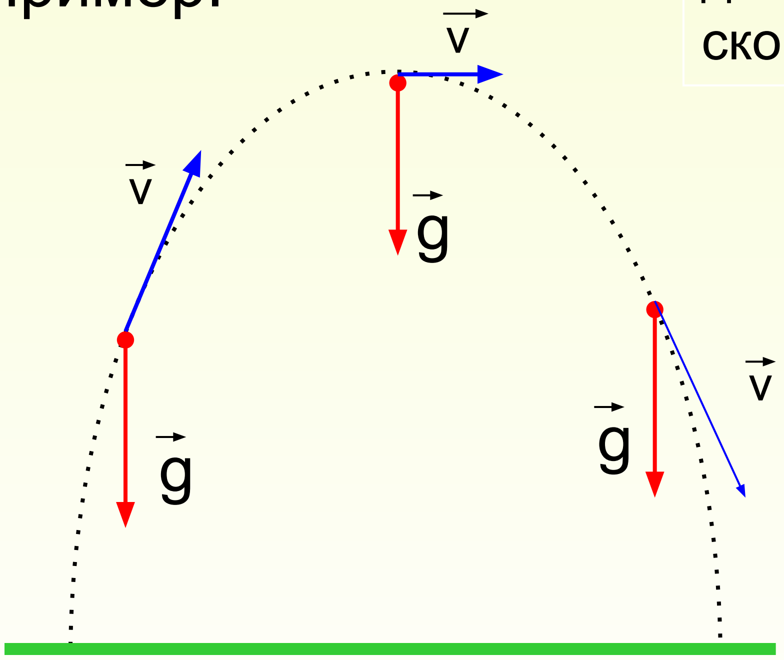
$$\boxed{\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}}$$

$$\boxed{a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}$$

Скорость и ускорение при криволинейном движении

Пример:



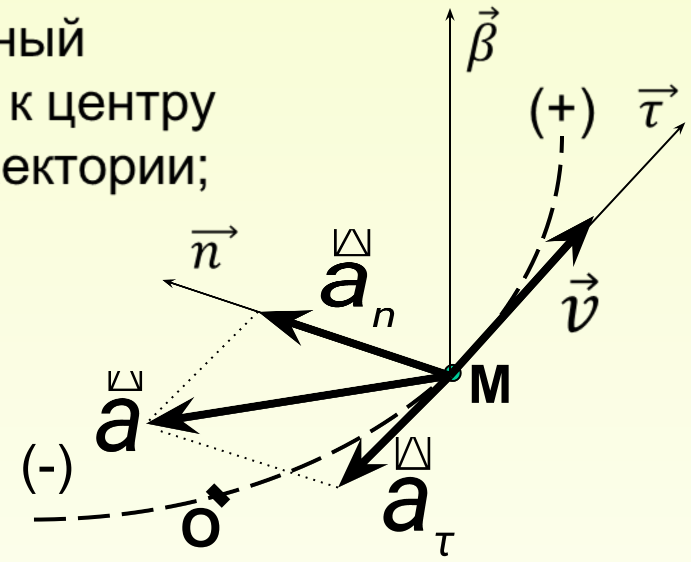
Ускорение при криволинейном движении направлено под углом к скорости

Описание движения МТ в естественной системе координат

$\vec{\tau}$ - единичный вектор, направленный по касательной к траектории;

$\vec{n}$ - нормаль - единичный вектор, направленный перпендикулярно касательной к траектории, к центру кривизны траектории, лежит в плоскости траектории;

$\vec{\beta}$ - бинормаль - единичный вектор, направленный перпендикулярно плоскости траектории.



Скорость точки $\vec{v} = v\vec{\tau}$

Полное ускорение точки $\vec{a}$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

$\vec{a}_n$ - нормальное ускорение – проекция полного ускорения на направление нормали;

$\vec{a}_\tau$ - тангенциальное ускорение – проекция полного ускорения на направление касательное к траектории.

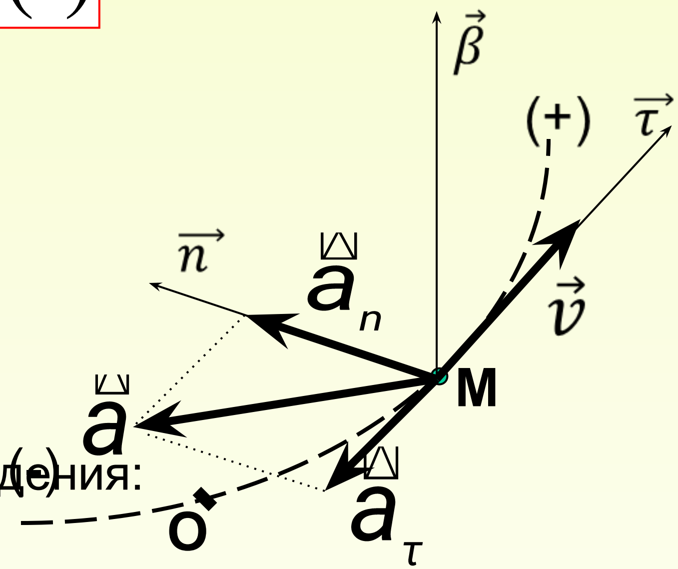
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Описание движения МТ в естественной системе координат

Закон движения МТ

OM = *s* – дуговая координата

$$\boxed{s = s(t)}$$



Скорость точки

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

В векторном виде:

$$\vec{v} = v\vec{\tau}$$

Ускорение найдем, как производную произведения:

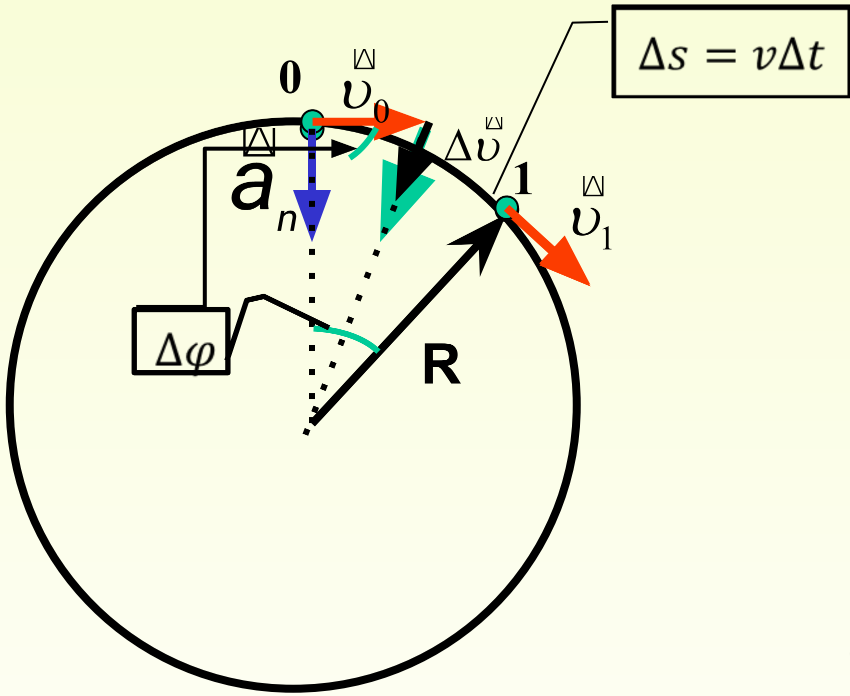
$$\vec{a} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}v = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

$\vec{a}_\tau = \dfrac{dv}{dt}\vec{\tau}$ - отвечает за изменение скорости по величине

$\vec{a}_n = \dfrac{d\vec{\tau}}{dt}v$ - отвечает за изменение скорости по направлению

Вывод выражения для нормального ускорения

Равномерное движение тела по окружности



$$\vec{a}_n = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

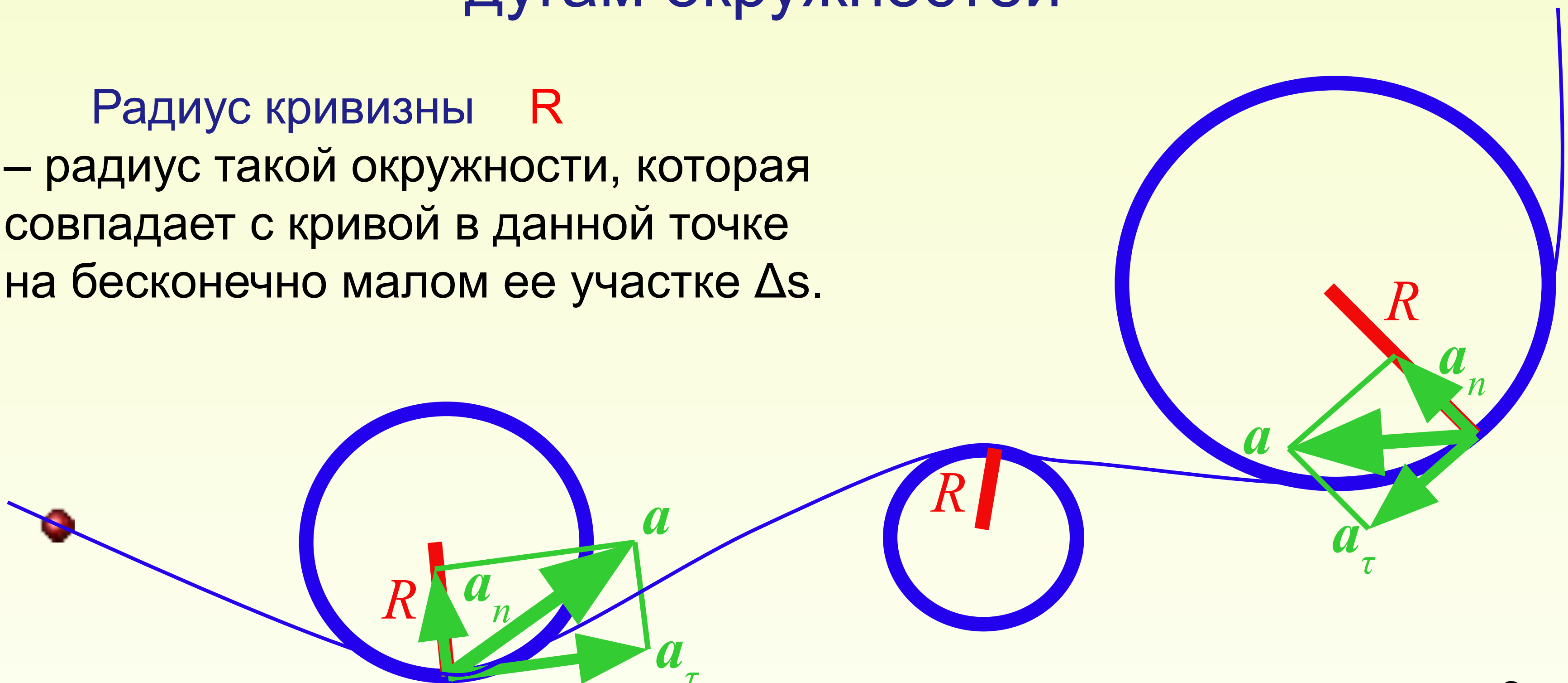
$$\frac{v\Delta t}{R} = \frac{\Delta v}{v}$$

$$a_n = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

$$\boxed{\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}}$$

Криволинейное движение – движение по дугам окружностей

Радиус кривизны R – радиус такой окружности, которая совпадает с кривой в данной точке на бесконечно малом ее участке Δs.

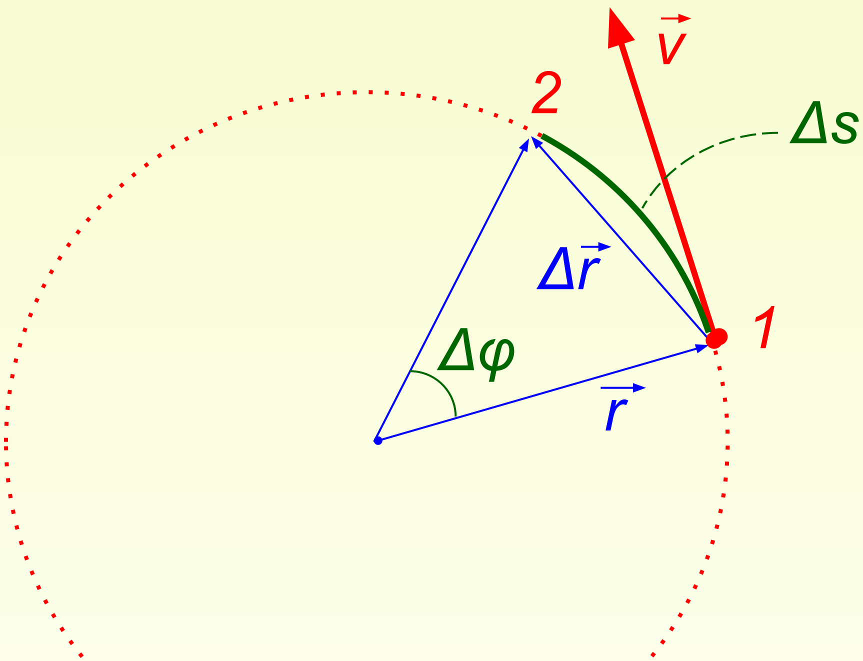


В задачах: $$R = \frac{v^2}{a_n}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{C} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = \frac{ds}{d\varphi}.}$$

Движение по прямой – движение по окружности бесконечно большого радиуса.

Угловые кинематические характеристики



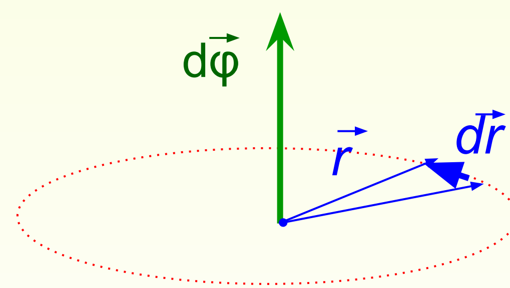
$$\Delta s = r \cdot \Delta\varphi$$

$$\text{При}\ \ \Delta t \to 0:$$

$$\Delta r \to dr \approx ds$$

$$dr = rd\varphi$$

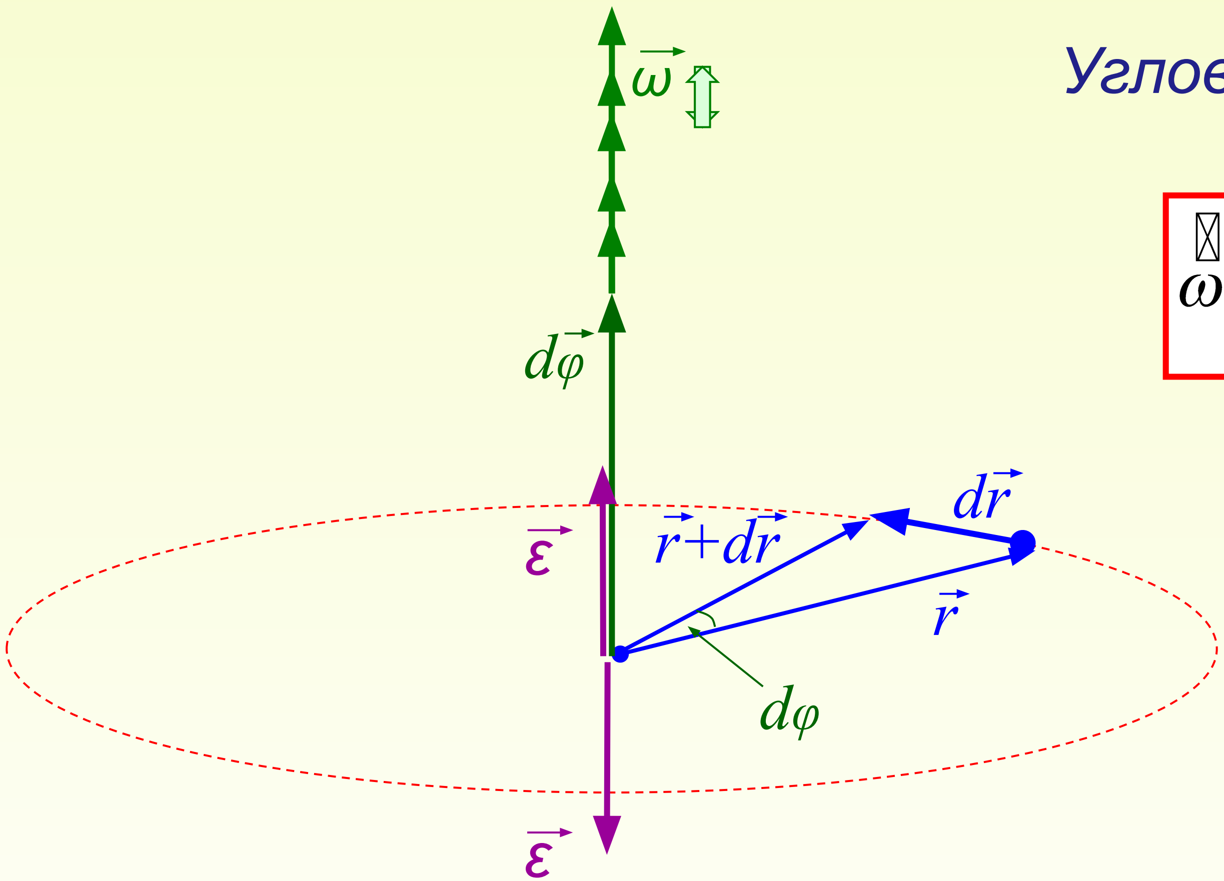
Направление вектора углового перемещения определяется по правилу «правого винта»: если вращение правого винта соответствует вращению тела, то поступательное движение винта указывает направление вектора углового перемещения.



Связь элементарного линейного перемещения с элементарным угловым перемещением:

$$\boxed{d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}}$$

Угловые кинематические характеристики



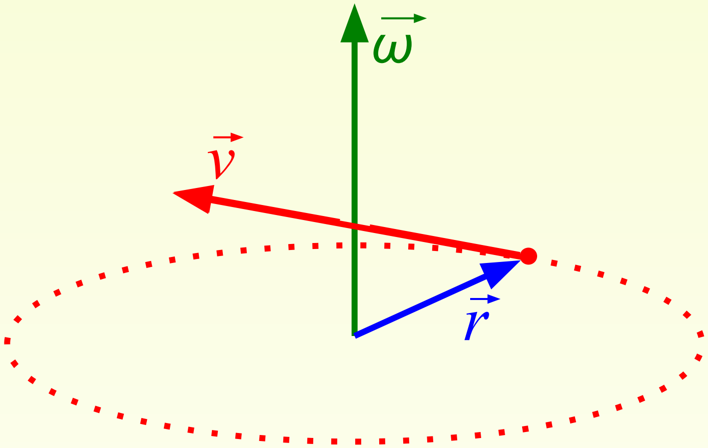
Угловая скорость

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}} \qquad \vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$$

Угловое ускорение

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}} \qquad \vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}$$

Линейная и угловая скорости



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$dr = r d\varphi$$

$$v = \frac{r d\varphi}{dt} = r\omega$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Математика – царица наук…
(К.Ф.Гаусс)

$$\boxed{\vec{\upsilon}=[\vec{\omega}\times\vec{r}\,]}$$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d([\vec{\omega}\times\vec{r}\,])}{dt}=[\overset{\vec{\varepsilon}}{\dot{\vec{\omega}}}\times\vec{r}\,]+[\vec{\omega}\times\overset{\vec{\upsilon}}{\dot{\vec{r}}}\,]$$

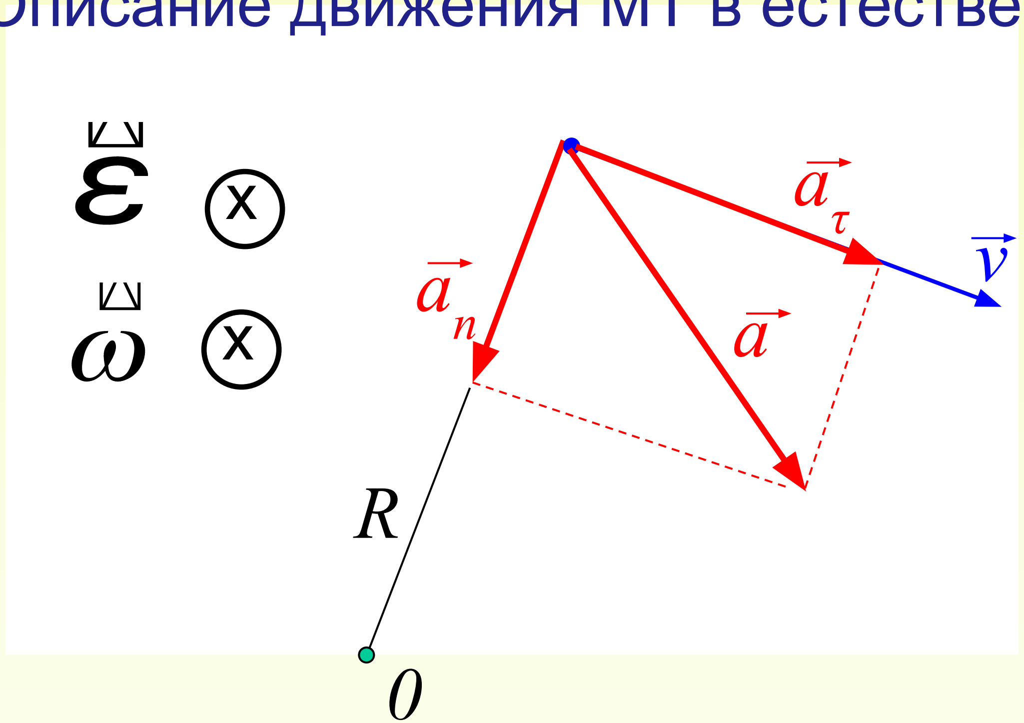
$$\boxed{\vec{a}=[\vec{\varepsilon}\times\vec{r}\,]+[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}\,]=\vec{a}_{\tau}+\vec{a}_{n}}$$

$$[\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}\,]=[\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}\,]]=$$

$$=\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,)-\vec{r}(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})=-\vec{r}(\vec{\omega})^{2}$$

$$\boxed{[\vec{A}[\vec{B},\vec{C}\,]]=\vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}\,)-\vec{C}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B}\,)}$$

Описание движения МТ в естественной системе координат



$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n}$$

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}$$

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{R}}$$

$$\boxed{\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n} = \omega^2 R \cdot \vec{n} = [\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}]}$$

Задача кинематики

Задача кинематики – знать положение тела в пространстве в любой момент времени.

Прямая задача кинематики заключается в том, чтобы по известной зависимости ускорения от времени $\vec{a}(t)$ найти скорость точки в любой момент времени и восстановить закон движения $\vec{r}(t)$. Решается путем интегрирования.

По определению ускорения:

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt},$$

Следовательно

$$d\vec{\upsilon}(t)=\vec{a}(t)dt$$

После интегрирования, для зависимости скорости от времени получаем:

$$\vec{\upsilon}(t)=\vec{\upsilon}(t_0)+\int\vec{a}(t)dt,$$

Где постоянная интегрирования найдена из начального условия для скорости:

$$\vec{v}_0=\vec{v}(t_0)$$

Прямая задача кинематики

По определению скорости: $$\vec{\upsilon}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt},$$

Следовательно $$d\vec{r}(t)=\vec{\upsilon}(t)dt,$$

После интегрирования, получаем закон движения: $$\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)+\int\vec{\upsilon}(t)dt.$$

Где постоянная интегрирования найдена из начального условия для радиус-вектора: $$\vec{r}_0=\vec{r}(t_0)$$

Если требуется найти перемещение за промежуток времени от t_1 до t_2, то интеграл берется определенный: $$\Delta\vec{r}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{\upsilon}(t)dt.$$

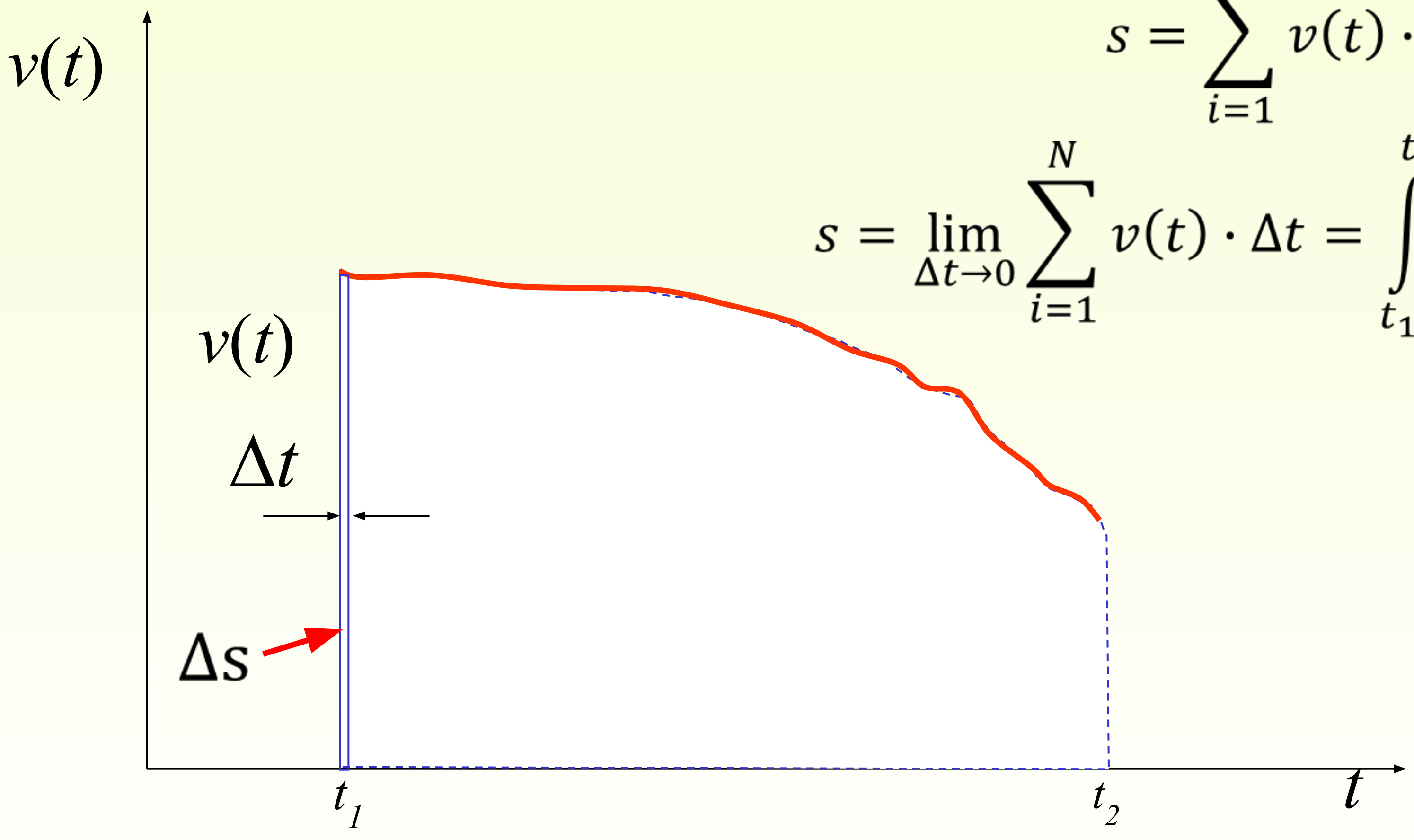
Если требуется найти путь за промежуток времени от t_1 до t_2, то берется определенный интеграл от модуля скорости: $$\Delta s=\int_{t_1}^{t_2}\left|\vec{\upsilon}(t)\right|dt.$$

Графическое представление пути

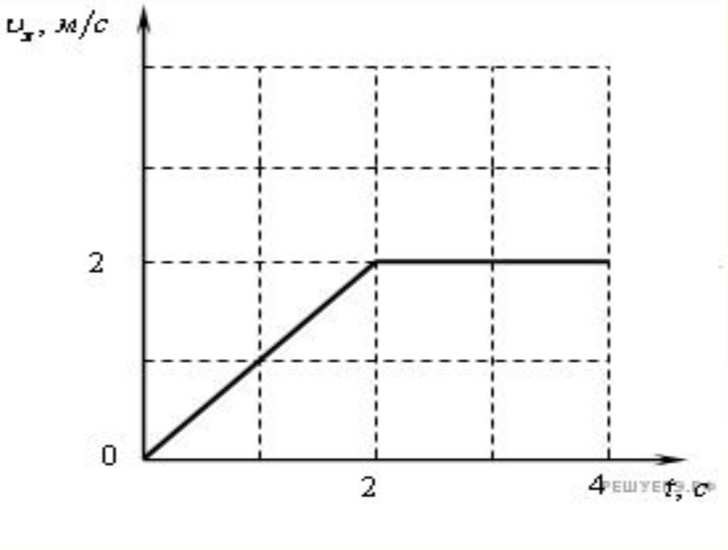
$$\Delta s = v(t)\cdot\Delta t$$

$$s = \sum_{i=1}^{N} v(t)\cdot\Delta t$$

$$s = \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=1}^{N} v(t)\cdot\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\cdot \mathrm{d}t$$



- Тело движется по оси Ох. На графике показана зави симость проекции скорости тела на ось Ох от време ни. Каков путь, пройденный телом к моменту времени t = 4 с? (Ответ дайте в метрах.)

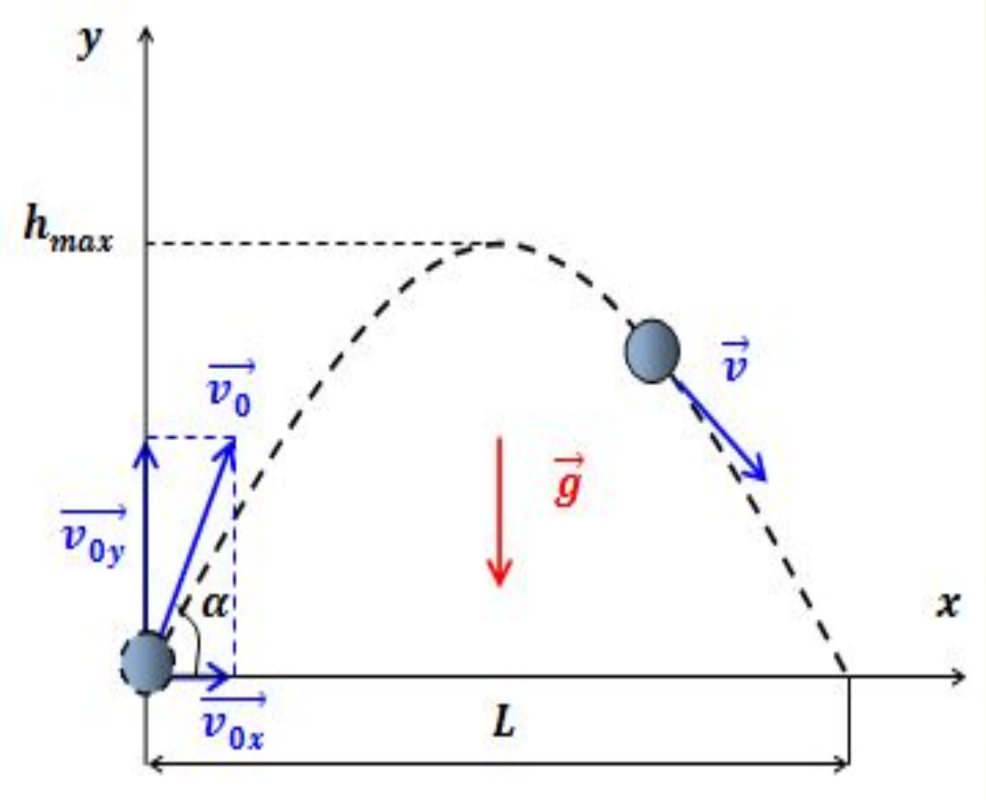


Задача

- Тело массой m брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0.

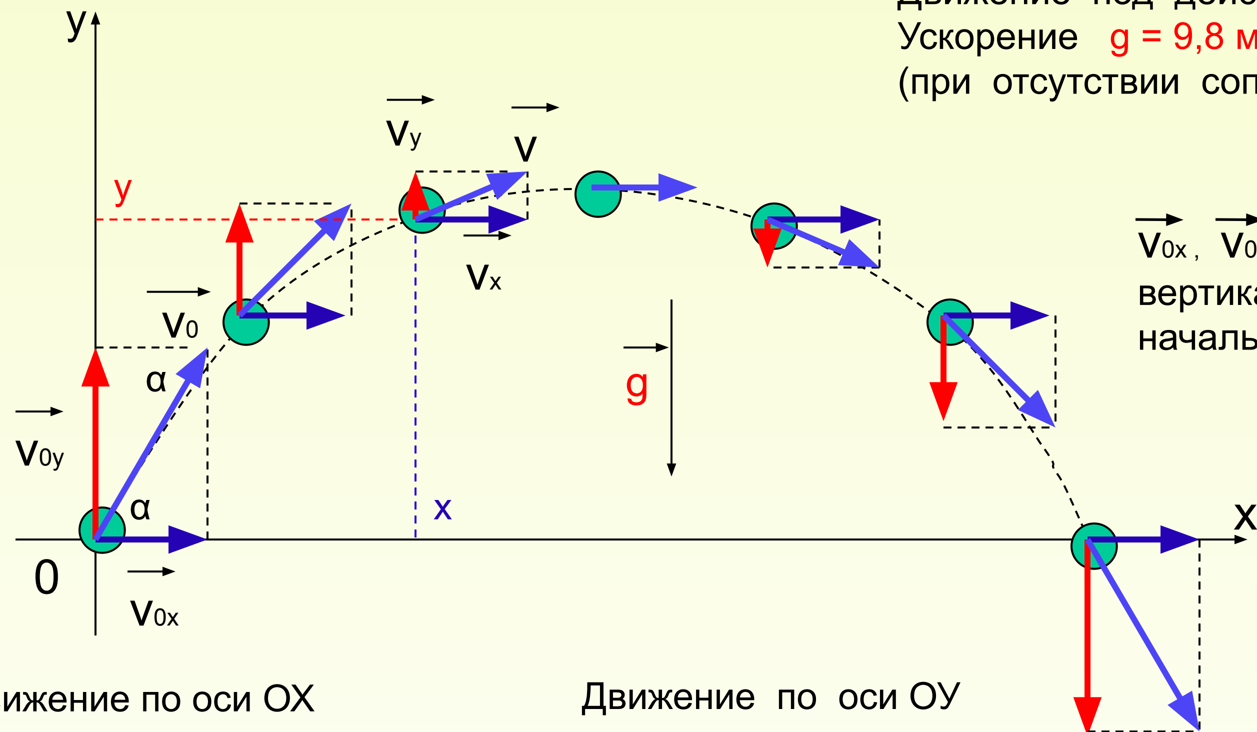
Найдите:

- 1) закон движения тела,
- 2) путь, пройденный телом за первые t секунд полета,
- 3) уравнение траектории,
- 4) время движения $t_к$,
- 5) высоту подъема,
- 6) дальность полета,
- 7) радиусы кривизны вершины и начала траектории.



Баллистическое движение

Тело брошено под углом к горизонту.
Движение под действием силы тяжести
Ускорение $g = 9{,}8$ м/с². Траектория – парабола
(при отсутствии сопротивления воздуха)



$\vec{v}_{0x}$, $\vec{v}_{0y}$ горизонтальная и вертикальная составляющие начальной скорости.

Рассмотрим изменение скорости тела

Движение по оси ОХ равномерное

$v_{ox} = v_o \cos\alpha$

$v_x = v_{ox}$

$x = v_{ox}t$ - закон движения по оси ОХ

v_x , v_{ox} – проекции векторов скорости на ось ОХ

Движение по оси ОУ с постоянным ускорением

$v_{oy} = v_o \sin\alpha$

$v_y = v_{oy} - g\,t$

$y = v_{oy}\,t - g\,t^2/\,2$ - закон движения по оси ОY

v_y , v_{oy} – проекции векторов скорости на ось ОУ

$v^2 = v_x^2 + v_y^2$

Задача кинематики

Обратная задача кинематики заключается в том, чтобы по известному закону движения $\vec{r}(t)$ найти зависимость скорости от времени $\vec{v}(t)$ и ускорения от времени $\vec{a}(t)$. Решается путем дифференцирования закона движения.

Задача. Радиус-вектор материальной точки изменяется по закону:

$$\vec{r} = \alpha t^2 \vec{i} - \beta t \vec{j}$$

Получите уравнение траектории и найдите зависимость от времени модулей векторов скорости и ускорения.

Уравнение траектории – зависимость одной координаты от другой - *y(x)*.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Longrightarrow \quad y = y(x)$$

$$v_x = \dot{x}; \; v_y = \dot{y};$$

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}; \; a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}.$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$$

Задача. Скорость движения материальной точки (м.т.) вдоль координатной оси х имеет вид: $\upsilon(t) = B + C t^2$, где B = 1 м/с, C = - 0,5 м/с^3. Найдите ее координату $x(t_1)$ и ускорение $a(t_1)$ в момент времени t_1 = 2 с. В начальный момент времени тело находилось в точке x_0 = 3 м.

Дано:

$\upsilon(t) = B + Ct^2$;

x_0 = 3 м, B = 1 м/с,

C = - 0,5 м/с^3;

t_1 = 2 с;

$x(t_1), a(t_1)$ = ?

Решение.

$$a(t) = \frac{d\upsilon}{dt} = 2Ct$$

$$a(t_1) = 2C\cdot t_1 = 2\cdot(-0,5)\cdot 2 = -2 \text{ м/с}^2$$

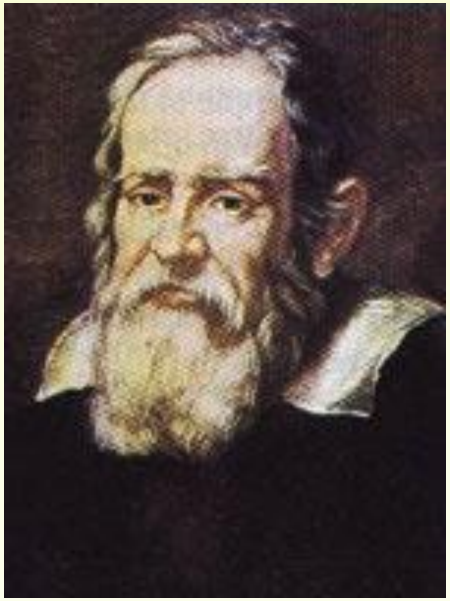
$$\upsilon(t) = \frac{dx}{dt} = B + C \cdot t^2.$$

$$x = \int \upsilon dt = \int (B + Ct^2)dt + const = Bt + Ct^3/3 + x_0$$

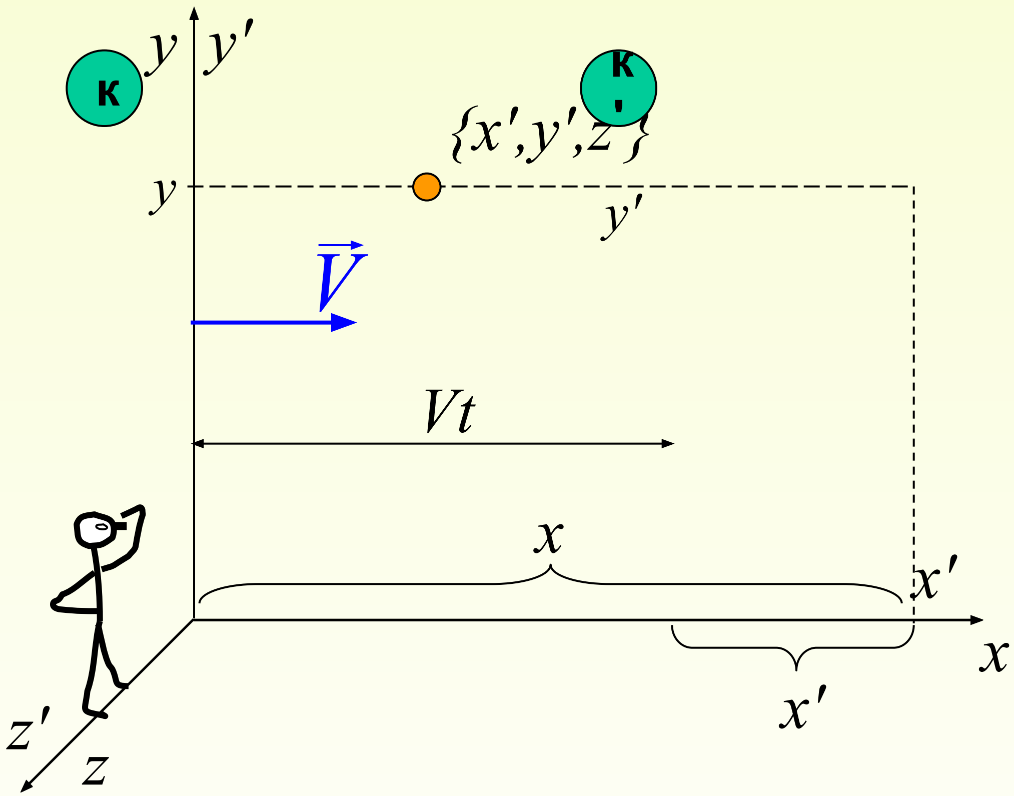
$$x(t_1) = 1\cdot 2 + (-0.5)\cdot 2^3/3+3 = 3,3 \text{ м}$$

Ответ: $x(t_1)$ =3,3 м, $a(t_1)$=-2 м/с^2.

- Преобразования Галилея и следствия из них.



Преобразования координат при сдвиге осей

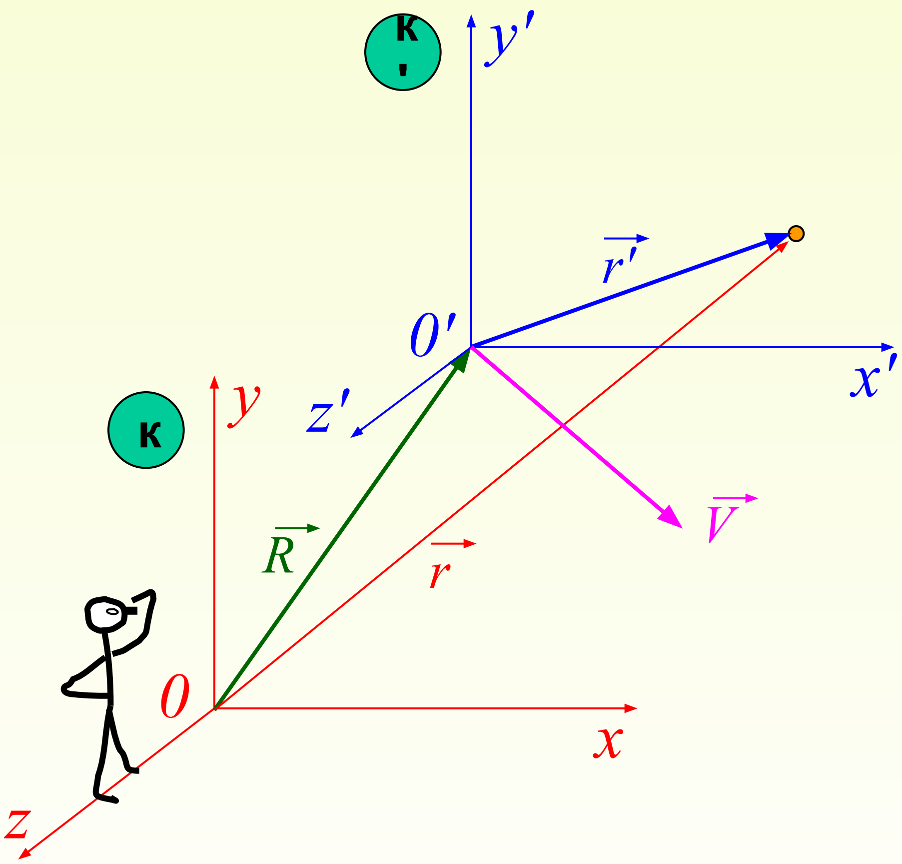


V – скорость движущейся системы K'

преобразования Галилея

$$x = x' + Vt$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = t'$$

В общем случае:



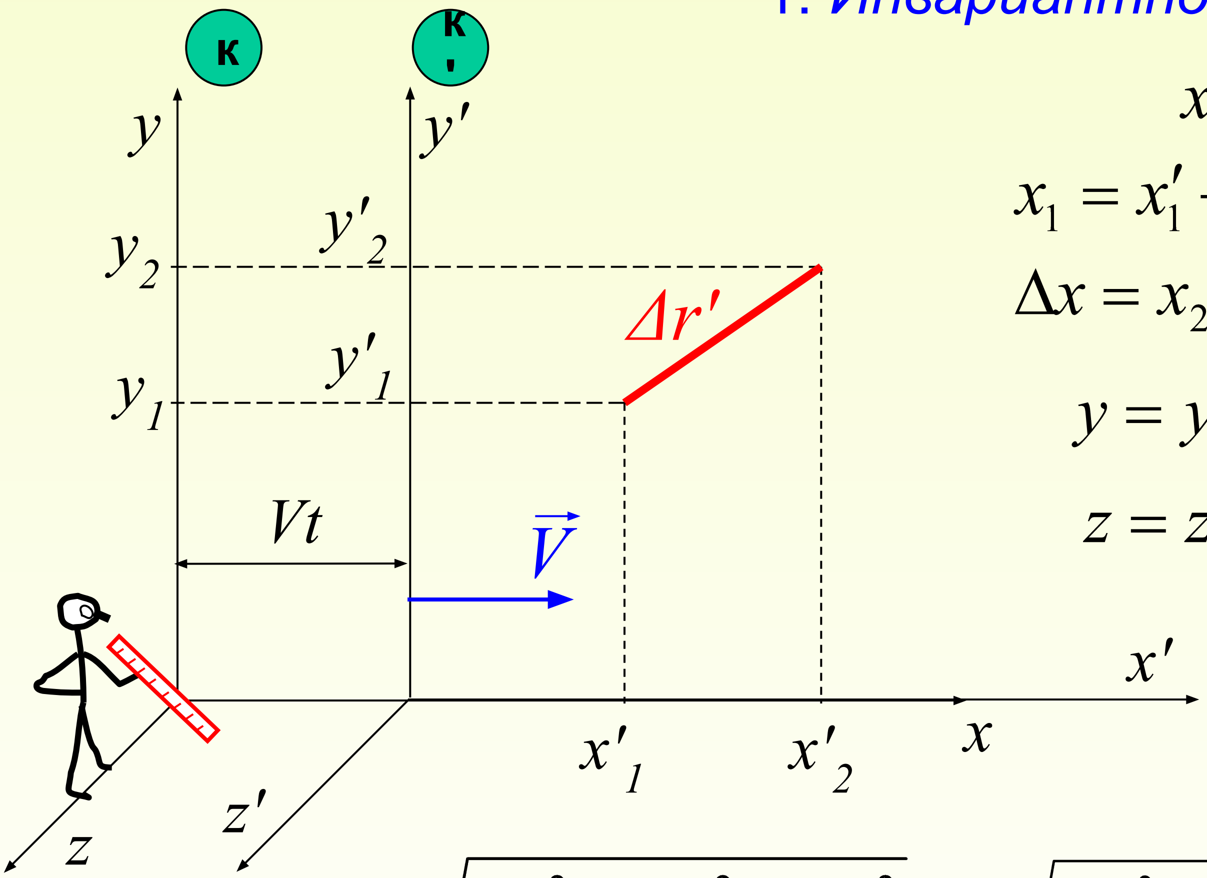
Скорость
движущейся системы K':

$$\vec{V} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t}$$

Радиус-вектор материальной точки относительно неподвижного наблюдателя (находящегося в системе K):

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}}$$

Следствия из преобразований Галилея



1. *Инвариантность длины отрезка*

$$x = x' + Vt$$

$$x_1 = x_1' + Vt; \qquad x_2 = x_2' + Vt$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x_2' - x_1' = \Delta x'$$

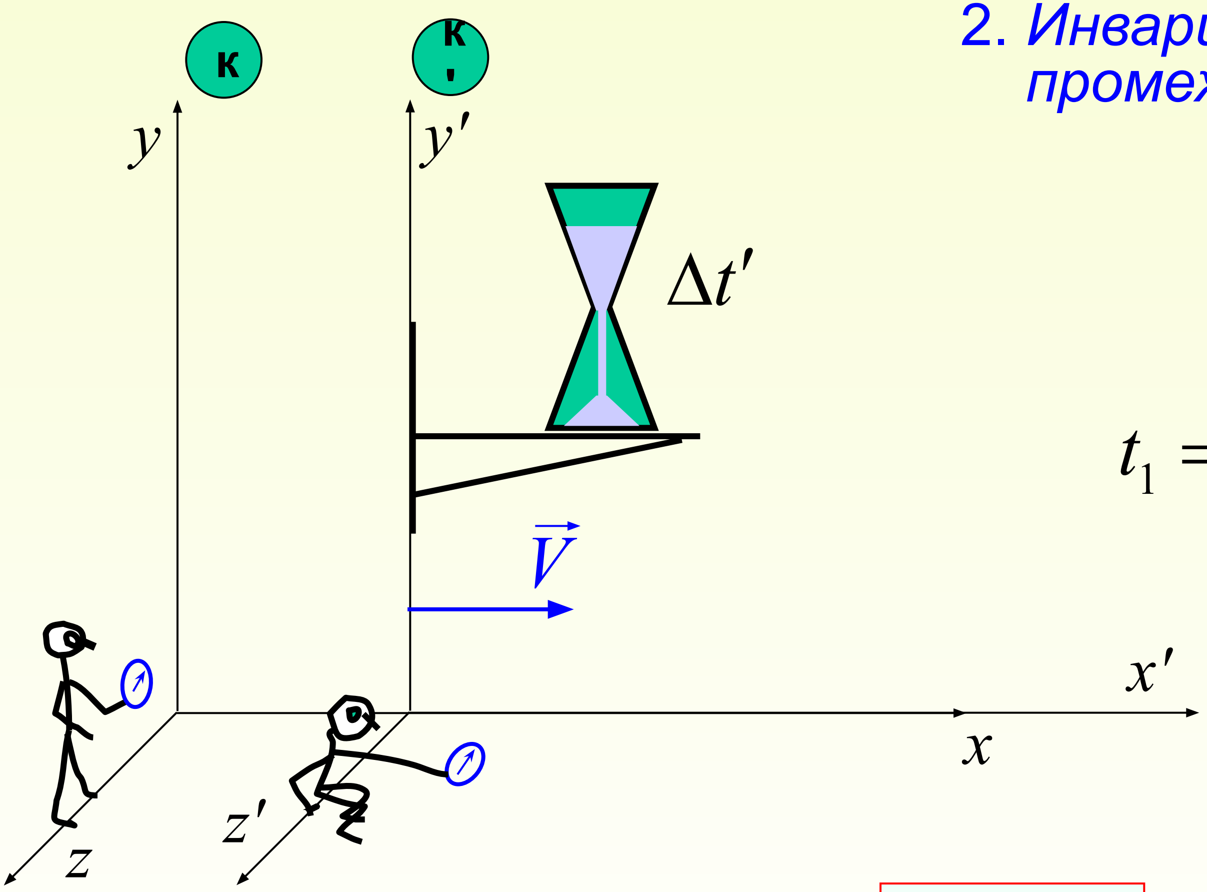
$$y = y' \quad \Longrightarrow \quad \Delta y = \Delta y'$$

$$z = z' \quad \Longrightarrow \quad \Delta z = \Delta z'$$

$$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2} = \Delta r'$$

$$\boxed{\Delta r = \Delta r'}$$

Следствия из преобразований Галилея



2. *Инвариантность промежутка времени*

$$t = t'$$

$$t_1 = t_1'; \quad t_2 = t_2';$$

$$\boxed{\Delta t = \Delta t'}$$

Следствия из преобразований Галилея

3. Закон сложения скоростей

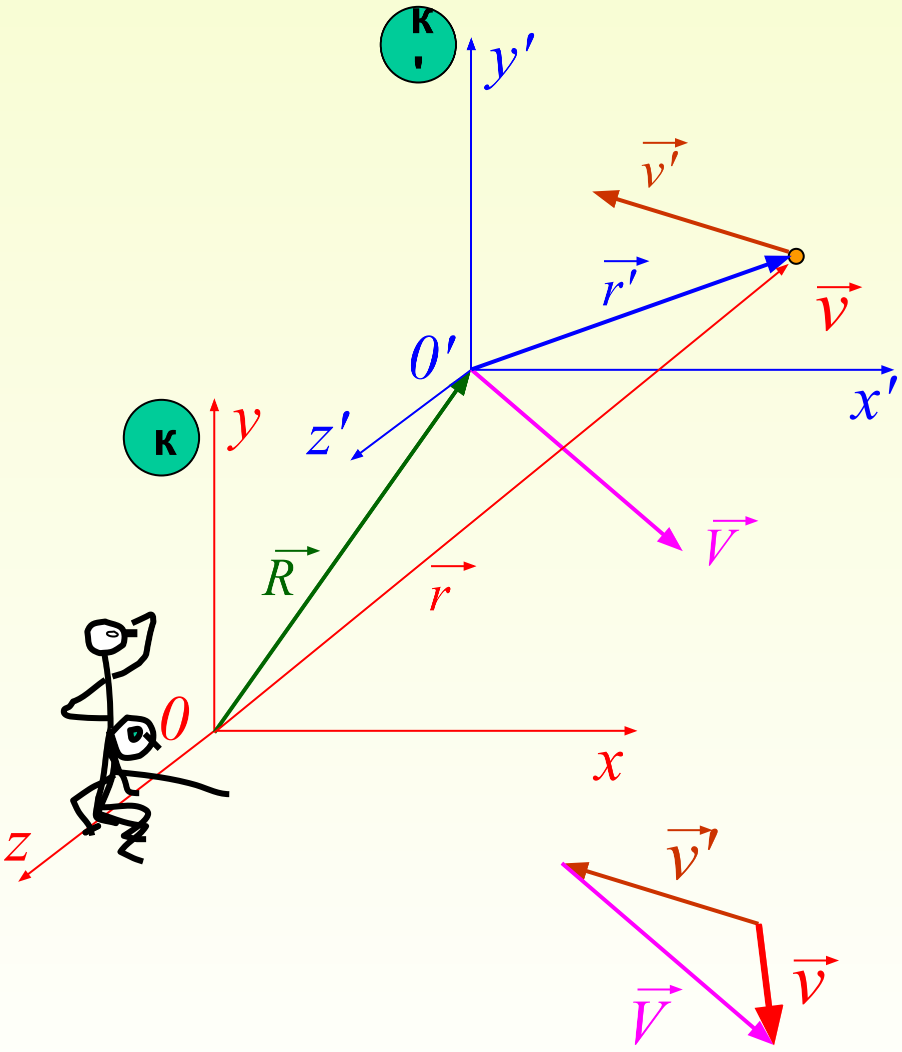
$$x = x' + Vt \;\Big|\, : \Delta t \quad \Rightarrow \quad v_x = v'_x + V$$

$$y = y' \;\Big|\, : \Delta t \quad \Rightarrow \quad v_y = v'_y$$

$$z = z' \;\Big|\, : \Delta t \quad \Rightarrow \quad v_z = v'_z$$

$$t = t'$$

В общем случае:



$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}\,'}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}\,' \qquad \vec{V}$$

Закон сложения скоростей:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}}$$

Следствия из преобразований Галилея

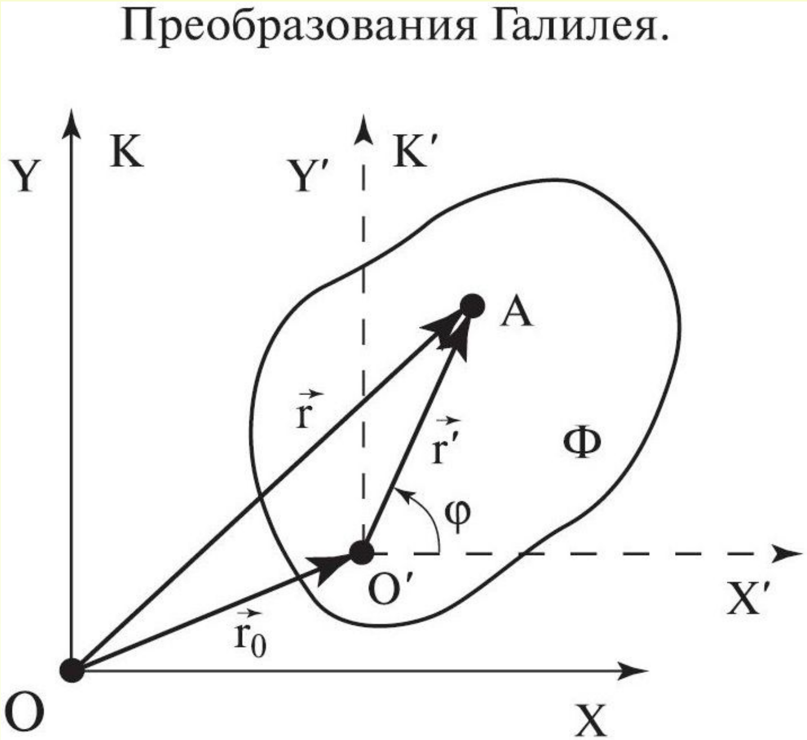
4. *Инвариантность ускорения*

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}; \qquad \vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}\,'}{\Delta t} + \cancel{\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}}\;\to 0$$

$$(т.к.\ \vec{V} = const)$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' = inv}$$

Т.е. законы Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея



- Служат для перехода от одной ИСО к другой, движущейся относительно первой прямолинейно и равномерно
- ИСО – инерциальная система отсчета - система отсчёта, в которой все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно, либо покоятся

- К – неподвижная система отсчета (СО)
- К$^{/}$ - СО, движущаяся относительно неподвижной с постоянной скоростью: $\overrightarrow{v_0} = const$
- Время в обеих системах течет одинаково: $t = t'$
- $\vec{r} = \vec{r}' + \overrightarrow{r_0}$ - сложение векторов
- Разделив на Δt, согласно определению скорости, получим:

  $\vec{v} = \vec{v}' + \overrightarrow{v_0}$, где

$\vec{v}$ - скорость точки А относительно неподвижной СО,

$\vec{v}'$ - скорость точки А относительно движущейся СО,

$\overrightarrow{v_0}$ - скорость движущейся СО относительно неподвижной

- Повторное деление на Δt, по определению ускорения, приводит к соотношению: $\vec{a} = \vec{a}'$, так как К$^{/}$ движется с постоянной скоростью