

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ И ПРИРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ, ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

Иллюстрации к курсу лекций

МОДЕЛИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ Часть 1-2

Автор: проф. Бобков С.
П.

Модели систем массового обслуживания

В реальной жизни часто приходится сталкиваться с системами, предназначенными для многократного использования при решении однотипных задач.

Возникающие при этом процессы получили название **процессов обслуживания**, а системы - **систем массового обслуживания (СМО)**. Работа любой СМО состоит в обработке (обслуживании) поступающего в нее потока требований (заявок на обслуживание).

Каждая СМО состоит из определенного числа обслуживающих единиц (приборов, устройств), которые принято называть **каналами обслуживания**. Каналами могут быть линии связи, рабочие точки, вычислительные машины, работники учреждения и др. По числу каналов СМО подразделяют на **одноканальные** и **многоканальные**.

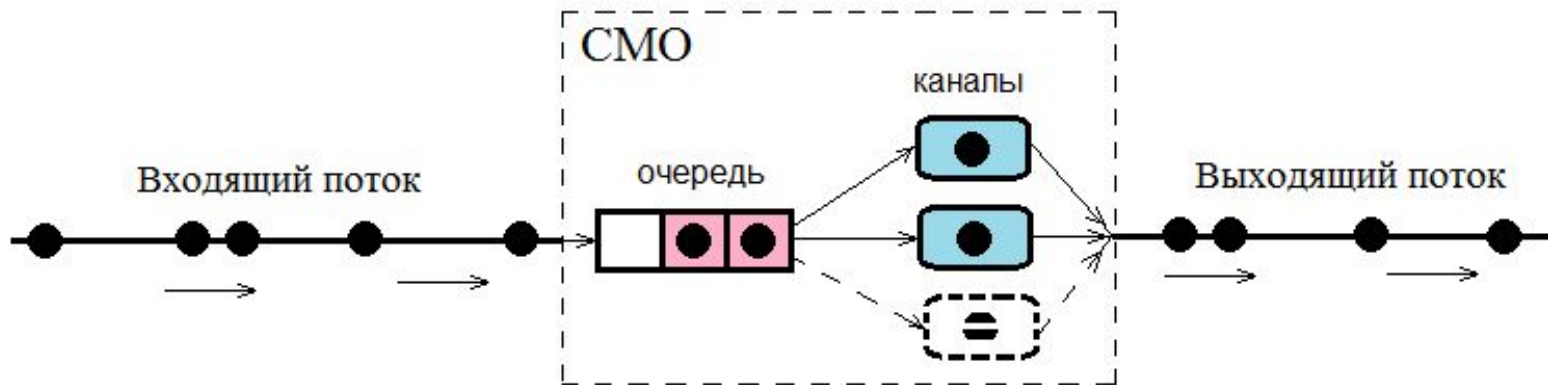


Схема системы массового обслуживания

Заявки (задачи) поступают в СМО обычно не регулярно, а случайно, образуя так называемый **случайный поток заявок**. Обслуживание заявок также продолжается какое-то случайное время.

Случайный характер потока заявок и времени обслуживания приводит к тому, что СМО оказывается загруженной неравномерно: в какие-то периоды времени скапливается очень большое количество заявок, в другие же периоды СМО работает с недогрузкой или простаивает.

Предметом теории массового обслуживания является построение **математических моделей**, связывающих заданные условия работы СМО в первую очередь ее параметры и структуру с показателями эффективности СМО, описывающими ее способность справляться с потоком заявок.

Под **структурой СМО** обычно понимают количество каналов, наличие и число мест в очереди.

Параметрами СМО обычно считаются интенсивность входного потока заявок и производительность каналов.

В качестве **показателей эффективности СМО** используются: вероятность обслуживания, пропускная способность системы, среднее число заявок в очереди; среднее время пребывания заявки в системе и т.п.

При построении математических моделей СМО будем использовать следующие допущения:

- 1) принимается, что перемещение заявки по системе, кроме ожидания в очереди и непосредственного процесса обслуживания в канале выполняется мгновенно;
- 2) события в системе (приход новой заявки, окончание обслуживания заявки) происходят не одновременно.
- 3) дисциплина выборки заявок из очереди естественная – в порядке поступления;
- 4) считается, что вычислительная система функционирует абсолютно надежно.

Будем считать, что входной поток заявок характеризуется интенсивностью λ .
Размерность этой величины – 1/сек. Интенсивность потока связана с вероятностью появления заявок следующим образом:

Вероятность появления одной заявки в интервале от t до $t+\Delta t$ равна $\lambda\Delta t$ и не зависит от t , а вероятность появления в этом интервале двух и более требований пренебрежимо мала.

Производительность каналов можно охарактеризовать интенсивностью обслуживания – μ . Этот показатель во многом аналогичен предложенному выше. Он также имеет размерность 1/сек, а его смысл в том, что вероятность окончания обслуживания очередного требования в интервале от t до $t+\Delta t$ равна $\mu\Delta t$ и не зависит от t .

Структура математической модели (вид и количество уравнений) зависит от конкретной структуры СМО и ее параметров.

Процедуру создания математической модели СМО разберем на примерах.

Рассмотрим простую

двухканальную систему массового обслуживания без очереди.

Каналы будем считать одинаковыми.

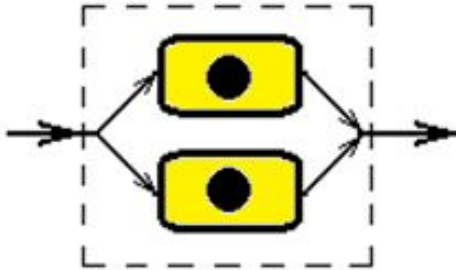


Схема двухканальной СМО без очереди

На вход системы поступает поток заявок с интенсивностью λ . Заявки обслуживаются с интенсивностью μ .

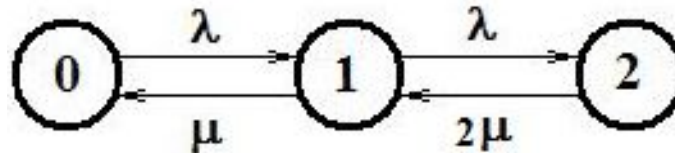
Рассматриваемая система имеет только три возможных состояния:

A_0 - в системе нет ни одной заявки, все каналы свободны, система простаивает;

A_1 - в системе одна заявка, занят один канал обслуживания;

A_2 - в системе две заявки, оба канала заняты.

Исследовать работу СМО очень удобно, если использовать граф состояний системы. Вершинами этого графа являются возможные состояния, направленными дугами – возможные переходы между состояниями. Для рассматриваемой СМО граф состояний имеет следующий вид:



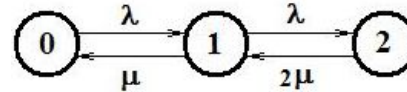
Граф состояний
двухканальной СМО
без очереди

Над дугами графа проставлены интенсивности соответствующих переходов.

Изменение состояний системы происходит под действием событий, происходящих в случайные моменты времени. То есть поведение системы есть случайный процесс. Вероятность того, что в какой-то момент времени система находится в состоянии A_i , обозначим, как $S_i(t)$. Несомненно, для нашей системы будет выполняться условие нормировки вероятностей

$$\sum_{k=0}^2 S_k(t) = 1 \quad (1.22)$$

Математическая модель рассматриваемой системы будет включать в себя вероятности состояний $S_i(t)$ и параметры интенсивности λ и μ .



Составим уравнения математической модели рассматриваемой СМО с использованием графа состояний.

Вероятность того, что система свободна $S_0(t)$ уменьшается под действием потока входящих заявок, причем это уменьшение пропорционально не только интенсивности входящего потока заявок λ , но и самой вероятности $S_0(t)$. В то же время рассматриваемая вероятность увеличивается потоком обслуженных заявок и это увеличение пропорционально интенсивности μ и значению вероятности $S_1(t)$. Поэтому можем записать:

$$\frac{dS_0(t)}{dt} = -\lambda S_0(t) + \mu S_1(t) \quad (1.23a)$$

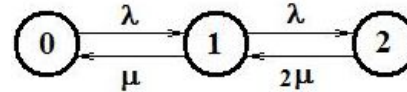
Рассуждая аналогично, можно записать соответствующее уравнение и для вероятностей других состояний.

Для состояния, когда занят один канал $S_1(t)$:

$$\frac{dS_1(t)}{dt} = \lambda S_0(t) + 2\mu S_2(t) - \lambda S_1(t) - \mu S_1(t) \quad (1.23б)$$

Для состояния, когда заняты оба канала $S_2(t)$:

$$\frac{dS_2(t)}{dt} = \lambda S_1(t) - 2\mu S_2(t) \quad (1.23в)$$



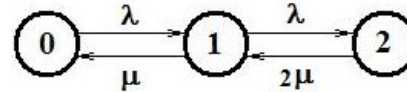
Полученная система дифференциальных уравнений для вероятностей состояний, носит имя ее автора – российского математика А.Н. Колмогорова.

Существенно, что в системе уравнений Колмогорова можно ограничиться $n - 1$ уравнением. Дополнительно используется условие нормировки.

Теперь система уравнений будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \frac{dS_0(t)}{dt} = -\lambda S_0(t) + \mu S_1(t) \\ \frac{dS_1(t)}{dt} = \lambda S_0(t) - (\lambda + \mu)S_1(t) + 2\mu S_2(t) \\ S_0(t) + S_1(t) + S_2(t) = 1 \end{cases} \quad (1.24)$$

Интегрирование системы уравнений (1.24) по времени позволяет получить вероятности состояний как **функции времени** $S_i(t)$.



Рассмотрим решение системы уравнений (1.24) методом Эйлера. При этом расчетные зависимости будут иметь вид:

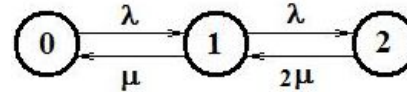
$$\begin{cases} S_0(i) = S_0(i-1) + h[-\lambda S_0(i-1) + \mu S_1(i-1)] \\ S_1(i) = S_1(i-1) + h[\lambda S_0(i) - (\lambda + \mu)S_1(i-1) + 2\mu S_2(i-1)] \\ S_2(i) = 1 - S_0(i) - S_1(i) \end{cases} \quad (1.25)$$

где h – шаг по времени.

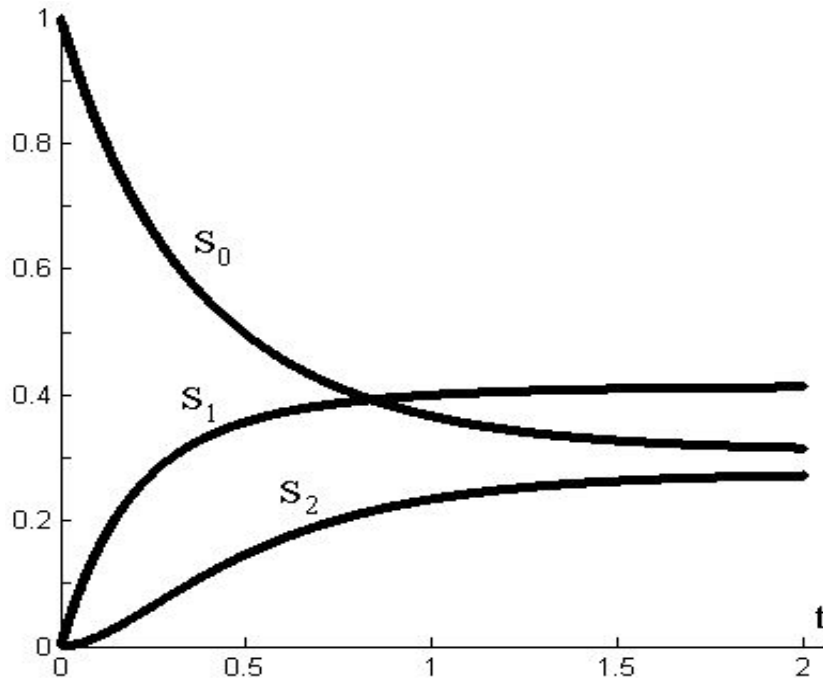
Зададим начальные условия. Допустим, в начальный момент времени рассматриваемая СМО простаивала, т.е. находилась в состоянии A_0 . Следовательно, вектор вероятности состояний СМО для начального момента времени будет иметь вид:

$$[S_k(0)] = [S_0(0); S_1(0); S_2(0)] = [1; 0; 0] \quad (1.26)$$

Двухканальная СМО без очереди

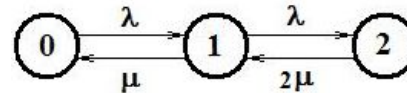


Решение математической модели при $\lambda = 2\text{с}^{-1}$ и $\mu = 1,5\text{с}^{-1}$:



Изменение вероятностей состояний СМО во времени

Видно, что вероятности состояний СМО изменяются во времени, стремясь к каким-то предельным значениям. Это означает, что с течением времени СМО переходит в установившийся (стационарный режим), когда элементы вектора вероятностей состояний перестают изменяться. В нашем случае этими стационарными значениями являются для $S_0 - 0,31$; для $S_1 - 0,41$; для $S_2 - 0,28$.



Отметим два важных

момента.
Важный момент 1

Стационарные значения не зависят от начальных условий. То есть, в каком бы состоянии СМО не находилась в начальный момент времени, она все равно придет к одним и тем же постоянным значениям в установившемся режиме.

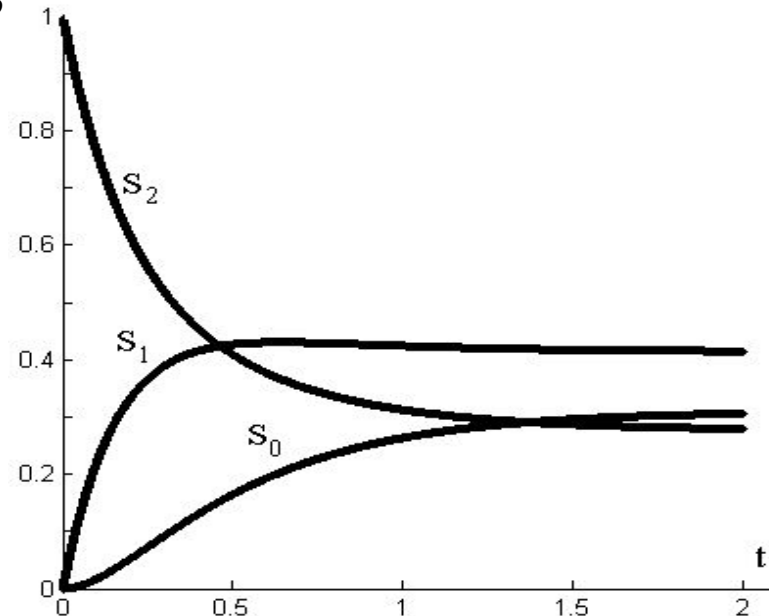
Покажем это. Изменим начальные условия.

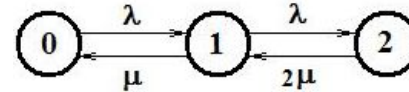
Пусть в начальный момент времени система находилась в состоянии A_2 .

Поэтому вектор вероятности состояний СМО для начального момента времени примет вид:

$$[S_k(0)] = [S_0(0); S_1(0); S_2(0)] = [0; 0; 1]$$

Значения вероятностей состояний СМО стремятся к тем же предельным значениям, что и при начальных условиях ранее рассмотренного примера





Важный момент 2

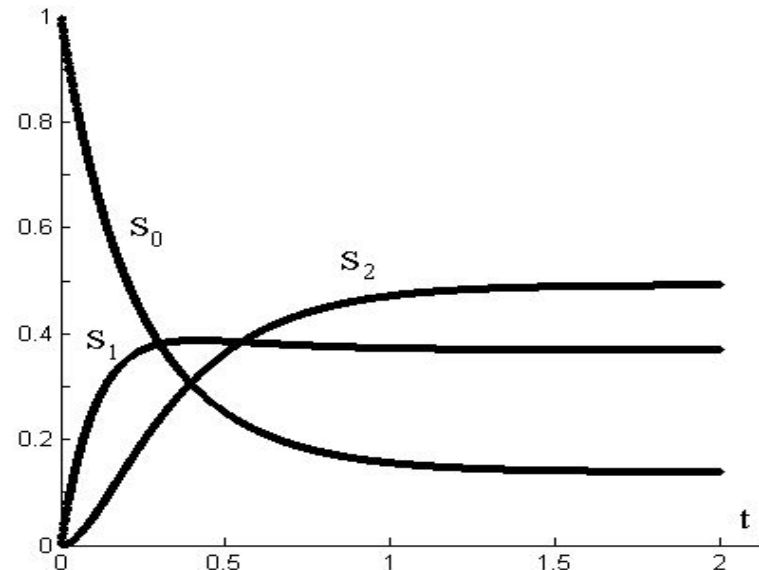
Стационарные значения зависят от исходных параметров λ

Для проверки этого положения увеличим в два раза интенсивность входящего потока заявок и решим уравнения математической модели с начальными условиями первого примера и при $\lambda = 4\text{с}^{-1}$ и $\mu = 1,5\text{с}^{-1}$.

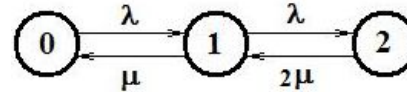
Решение при увеличенной интенсивности λ

Значения элементов вектора вероятностей в стационарном режиме в условиях увеличенной интенсивности входного потока изменились

$$S_0 = 0,14 ; S_1 = 0,37 ; S_2 = 0,49$$



Анализ этих данных показывает, что вероятность простоя СМО (вероятность состояния A_0) уменьшилась более, чем вдвое, а вероятность занятости обоих каналов СМО (вероятность состояния A_2) – почти вдвое увеличилась



В практике использования моделей СМО нередко возникают ситуации, когда исследователя интересует не сам процесс изменения вероятностей состояний во времени, а только стационарные значения вероятностей.

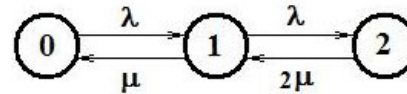
В таких случаях не имеет смысла решать дифференциальные уравнения вида (1.24). Проще получить и далее использовать уравнения для стационарного режима работы СМО.

Такие уравнения выводятся, исходя из того обстоятельства, что в стационарном (установившемся) режиме производные по времени равны нулю. Тогда из (1.24) получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda S_0 + \mu S_1 = 0 \\ \lambda S_0 - (\lambda + \mu) S_1 + 2\mu S_2 = 0 \\ S_0 + S_1 + S_2 = 1 \end{cases} \quad (1.28)$$

Решение этой системы при $\lambda = 2\text{ с}^{-1}$ и $\mu = 1,5\text{ с}^{-1}$ сразу дает искомые значения стационарных вероятностей: $S_0 = 0,31$; $S_1 = 0,41$; $S_2 = 0,28$.

Найденные значения вероятности состояний S_i либо позволяют определить показатели эффективности СМО, либо сами уже являются такими показателями.



Показатели эффективности работы СМО конкретной структуры при заданных значениях интенсивности потоков случайных событий.

1. Вероятность S_0 нахождения системы в состоянии A_0 , когда в ней нет ни одной заявки, это **вероятность простоя** системы, т.е. в нашем случае $P_{\text{пр}} = S_0 = 0,31$
2. Вероятность S_2 нахождения системы в состоянии A_2 , когда система полностью занята и вновь поступившая заявка получает отказ, это **вероятность отказа** в обслуживании т.е. в нашем случае $P_{\text{отк}} = S_2 = 0,28$
3. Вероятность того, что вновь поступившая заявка будет обслужена, т.е. **вероятность обслуживания**, можно найти так $P_{\text{об}} = 1 - S_2$ или с данного случая $P_{\text{об}} = S_0 + S_1 = 0,72$
4. Поскольку в системе нет очереди, то **среднее количество заявок, находящихся в системе** будет равно **среднему числу занятых каналов**. Для данного случая этот показатель равен $K = S_1 + 2S_2 = 0,41 + 2 \cdot 0,28 = 0,97$
5. **Среднюю продолжительность пребывания заявки в системе** можно вычислить следующим образом: $t_c = K / (2\mu) = 0,97 / (2 \cdot 1,5) = 0,32$ с
6. Часто при анализе эффективности работы СМО используют показатель **пропускная способность системы**. Он определяется так: $C = P_{\text{об}} \lambda = 1,44$ заявок в секунду.

В качестве второго примера рассмотрим СМО, которая имеет два канала и возможность хранить одну заявку в очереди. При этом производительность одного канала выше, чем второго. Дисциплина обслуживания заявок предполагает, что заявка поступает в первую очередь на обслуживание в более мощный |

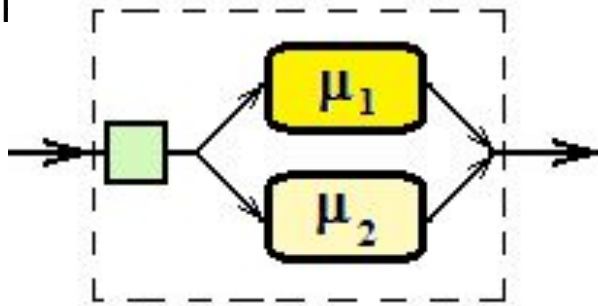
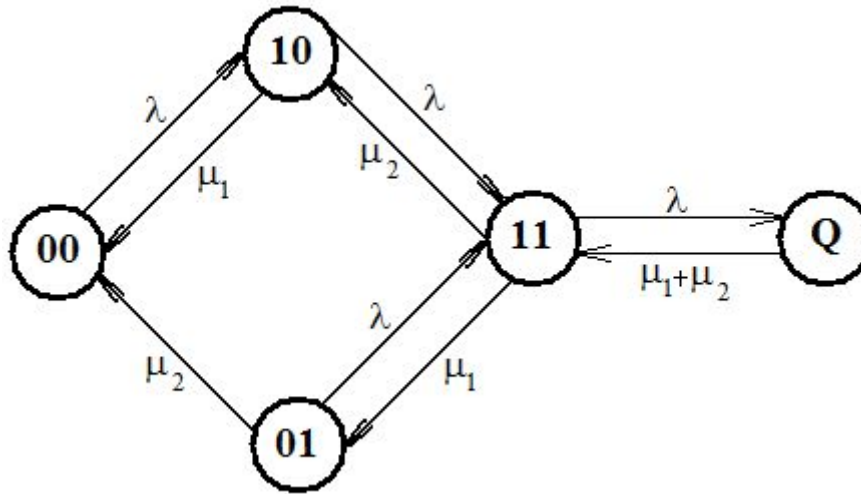
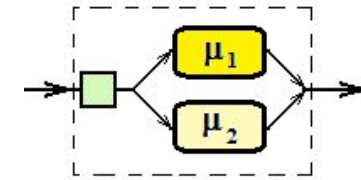


Схема СМО с двумя неодинаковыми каналами и одним местом в очереди

На вход системы поступает поток заявок с интенсивностью λ . Интенсивность обслуживания заявок первым каналом μ_1 , вторым – μ_2 .

Рассматриваемая система может иметь пять возможных состояний:

- A_{00} - в системе нет ни одной заявки, все каналы свободны;
- A_{10} - в системе одна заявка, занят более производительный канал;
- A_{11} - в системе две заявки, заняты оба канала, очередь пуста;
- A_{01} - в системе одна заявка, занят менее производительный канал;
- A_Q - в системе три заявки, оба канала и место в очереди заняты



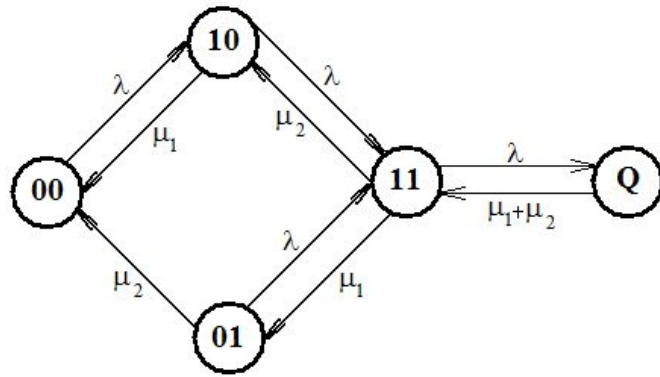
Граф состояний СМО с двумя неодинаковыми каналами и одним местом в очереди

Как и в ранее рассмотренном примере, обозначим, как $S_i(t)$ вероятность того, что в какой-то момент времени СМО будет находиться в состоянии A_i ,

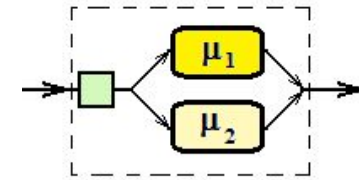
Условие нормировки вероятностей :

$$\sum S_k(t) = 1 \quad (1.29)$$

МОДЕЛИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ
 Модели систем массового обслуживания



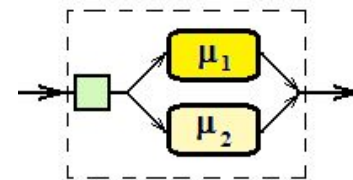
СМО с двумя неодинаковыми каналами и одним местом в очереди



Составим систему уравнений А.Н. Колмогорова

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_{00}(t)}{dt} = -\lambda S_{00}(t) + \mu_1 S_{10}(t) + \mu_2 S_{01}(t) \\ \frac{dS_{10}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu_1) S_{10}(t) + \lambda S_{00}(t) + \mu_2 S_{11}(t) \\ \frac{dS_{01}(t)}{dt} = -(\lambda + \mu_2) S_{01}(t) + \mu_1 S_{11}(t) \\ \frac{dS_Q(t)}{dt} = \lambda S_{11}(t) - (\mu_1 + \mu_2) S_Q(t) \\ S_{00}(t) + S_{10}(t) + S_{01}(t) + S_{11}(t) + S_Q(t) = 1 \end{array} \right. \quad (1.30)$$

В системе уравнений (1.30) дифференциальное уравнение для вероятности состояния $S_{11}(t)$ заменено условием нормировки.



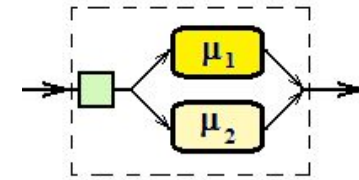
Расчетные зависимости при решении системы уравнений (1.30) методом Эйлера будут иметь вид:

$$\begin{cases} S_{00}(i) = S_{00}(i-1) + h[-\lambda S_{00}(i-1) + \mu_1 S_{10}(i-1) + \mu_2 S_{01}(i-1)] \\ S_{10}(i) = S_{10}(i-1) + h[-(\lambda + \mu_1)S_{10}(i-1) + \lambda S_{00}(i) + \mu_2 S_{11}(i-1)] \\ S_{01}(i) = S_{01}(i-1) + h[-(\lambda + \mu_2)S_{01}(i-1) + \mu_1 S_{11}(i-1)] \\ S_Q(i) = S_Q(i-1) + h[\lambda S_{11}(i-1) - (\mu_1 + \mu_2)S_Q(i-1)] \\ S_{11}(i) = 1 - S_{00}(i) - S_{10}(i) - S_{01}(i) - S_Q(i) \end{cases} \quad (1.31)$$

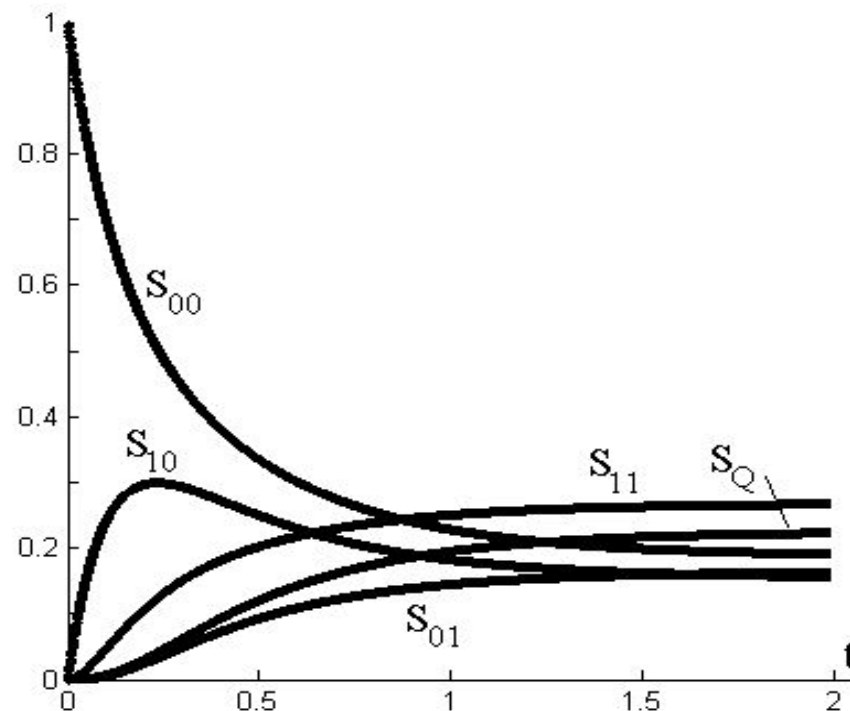
где h – шаг по времени.

Для задания начальных условий положим, что в начальный момент времени рассматриваемая СМО простаивала, т.е. находилась в состоянии A_{00} . Следовательно, вектор вероятности состояний СМО для начального момента времени будет иметь вид:

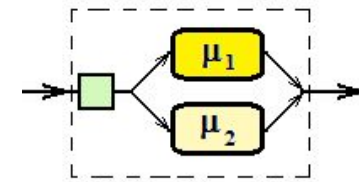
$$[S_k(0)] = [1; 0; 0; 0; 0] \quad (1.32)$$



Решение системы уравнений при $\lambda = 4 \text{ с}^{-1}$, $\mu_1 = 3,5 \text{ с}^{-1}$, $\mu_2 = 1,5 \text{ с}^{-1}$ и начальных условиях (1.32):



Изменение вероятностей состояний СМО во времени

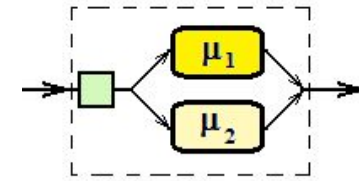


Система линейных алгебраических уравнений для стационарного режима рассматриваемой СМО будет иметь вид:

$$\begin{cases} -\lambda S_{00} + \mu_1 S_{10} + \mu_2 S_{01} = 0 \\ -(\lambda + \mu_1) S_{10} + \lambda S_{00} + \mu_2 S_{11} = 0 \\ -(\lambda + \mu_2) S_{01} + \mu_1 S_{11} = 0 \\ \lambda S_{11} - (\mu_1 + \mu_2) S_Q = 0 \\ S_{00} + S_{10} + S_{01} + S_{11} + S_Q = 1 \end{cases} \quad (1.33)$$

Решение этой системы при указанных выше значениях интенсивностей потоков даст следующие значения стационарных вероятностей:

$$S_{00} = 0,19 ; S_{10} = 0,15 ; S_{01} = 0,16 ; S_{11} = 0,27 ; S_Q = 0,23.$$



Найдем некоторые показатели эффективности данной СМО.

1. **Вероятность простоя** системы: $P_{\text{пр}} = S_{00} = 0,19$
2. **Вероятность отказа** в обслуживании: $P_{\text{отк}} = S_Q = 0,23$
3. **Вероятность обслуживания**: $P_{\text{об}} = 1 - S_Q = 0,78$
4. **Среднее число занятых каналов**. Для нашего случая этот показатель равен $K = S_{10} + S_{01} + 2S_{11} = 0,85$
5. **Среднее число заявок в очереди** : $L = S_Q = 0,23$
6. **Среднее число заявок в СМО** : $K_S = K + L = 1,08$
7. **Средняя продолжительность пребывания заявки в системе**:
 $t_C = K_S / (\mu_1 + \mu_2) = 0,216 \text{ с}$
8. **Пропускная способность** системы: $C = P_{\text{об}} \lambda = 3,12$ заявок в секунду.