Тема «Теория вероятностей. Математическая статистика».

Лекция 7 Основные теоремы и зависимости математической статистики

Цели лекции:

1. Ввести предмет математической статистики.
2. Дать статистическое определение вероятности события.
3. Сформулировать теоремы о вероятностях.
4. Случайные величины дискретного типа, их закон распределения, числовые характеристики случайных величин

B1. Предмет математической статистики

Опр. 1. **Математическая статистика** – это раздел математики, посвященный методам сбора, анализа и обработки статистических данных для научных и практических целей.

Опр. 2. **Статистические данные** – это данные, полученные в результате обследования большого числа объектов или явлений.

Какие задачи стоят перед математической статистикой?

Первая задача математической статистики состоит в разработке методов сбора и группировки статистических данных.

Вторая задача состоит в разработке методов анализа полученных статистических данных.

Этот анализ включает:
– оценку вероятности событий,
– оценку законов распределения случайных величин,
– оценку параметров распределения и связей между случайными величинами.

Математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей и базируется на ее математическом аппарате.

Одними из основных понятий математической статистики являются генеральная совокупность и выборка.

Опр.3. Генеральная совокупность – это совокупность всех объектов (конечная или бесконечная), подлежащая исследованию.

Опр.4. Выборка – это часть генеральной совокупности.

Пример:
Изучается продолжительность работы ламп, выпускаемых заводом.
Генеральная совокупность – все лампы, выпущенные заводом.
Выборка – часть ламп, за продолжительностью работы которых ведется наблюдение.

Выводы, полученные по выборке, переносятся на всю генеральную совокупность.

Как правило, изучается определенный параметр выборки, который является случайной величиной. Обработка статистических данных дает среднее значение параметра, вероятность появления некоторого значения параметра и т.д.

Мы будем изучать методы обработки статистических данных. Для этого необходимо вспомнить некоторые понятия теории вероятностей.

$\boxed{\text{В2.}}$ Случайные события, действия над событиями. Статистическое определение вероятности случайного события

2.1. Основные понятия теории вероятностей

Опр.1. Испытание (опыт) – это действие, совершаемое при выполнении определенных условий.

Опр.2. Случайное событие – это событие, которое может произойти или не произойти в результате испытания.

Пример:

Испытание – стрельба по цели. Случайное событие – попадание в цель.

Опр.3. Событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет в результате испытания, **невозможным**, если оно не может произойти.

Обозначения: достоверное событие – Ω, невозможное – $\varnothing$.

Действия над событиями

1) Сумма событий:

$$A+B$$

– произошло хотя бы одно из событий A или B.

2) Произведение событий:

$$AB$$

– произошли оба события A и B.

3) Противоположное событие:

$$\overline{A}$$

– событие A не произошло.

Пример:

Два стрелка производят по одному выстрелу.

Случайные события: A – «первый стрелок попал в цель»,
B – «второй стрелок попал в цель».

Действия: $A+B$ ”хотя бы один стрелок попал в цель”,

AB ”оба стрелка попали в цель”,

$\overline{A}$ ”первый стрелок не попал в цель”,

$A\overline{B}$ ”только первый стрелок попал в цель”,

$\overline{A}B$ ”только второй стрелок попал в цель”,

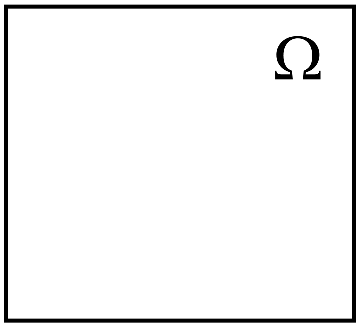
$\overline{A}\,\overline{B}$ ”ни один стрелок не попал в цель”.

Опр.4. Два события называется **несовместными**, если они не могут произойти одновременно в результате испытания и **совместными**, если в результате испытания они могут произойти вместе.

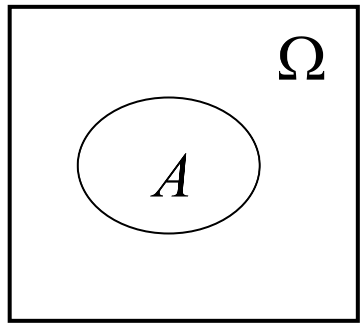
A, B – совместные; $\overline{A}$, A – несовместные; $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ – несовместные.

Геометрическое изображение

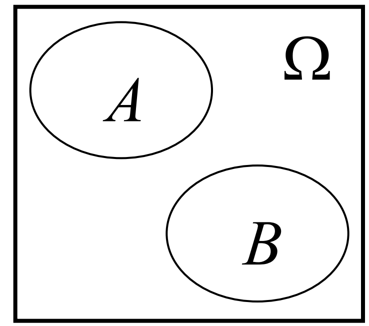
Достоверное событие



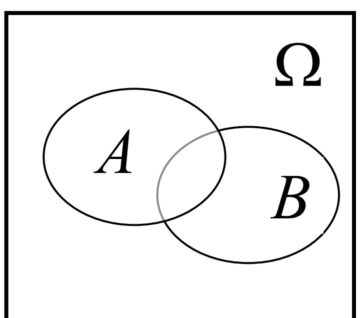
Случайное событие



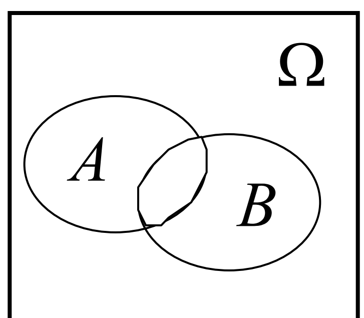
Несовместные события



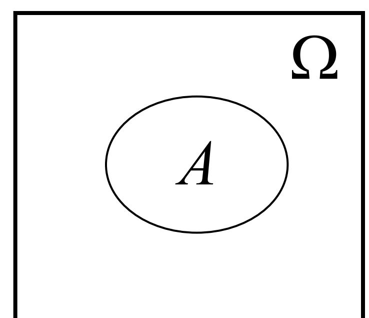
$A+B$



AB



$\overline{A}$



2.2. Статистическое определение вероятности

Опр.1. Пусть n – число испытаний, в которых рассматривается случайное событие A, n_A – число испытаний, в которых событие A произошло. Тогда число

$$\hat{p}_A = \frac{n_A}{n}$$

называется **частотой события** A.

Опр.2. Вероятностью события A называется число $p(A)$, относительно, которого стабилизируется относительная частота $\hat{p}_A$ при неограниченном увеличении числа испытаний, то есть

$$\hat{p}_A \xrightarrow[n\to\infty]{} p(A).$$

$p(A) \in [0,1]$. Невозможное: $p(\varnothing) = 0$. Достоверное: $p(\Omega) = 1$.

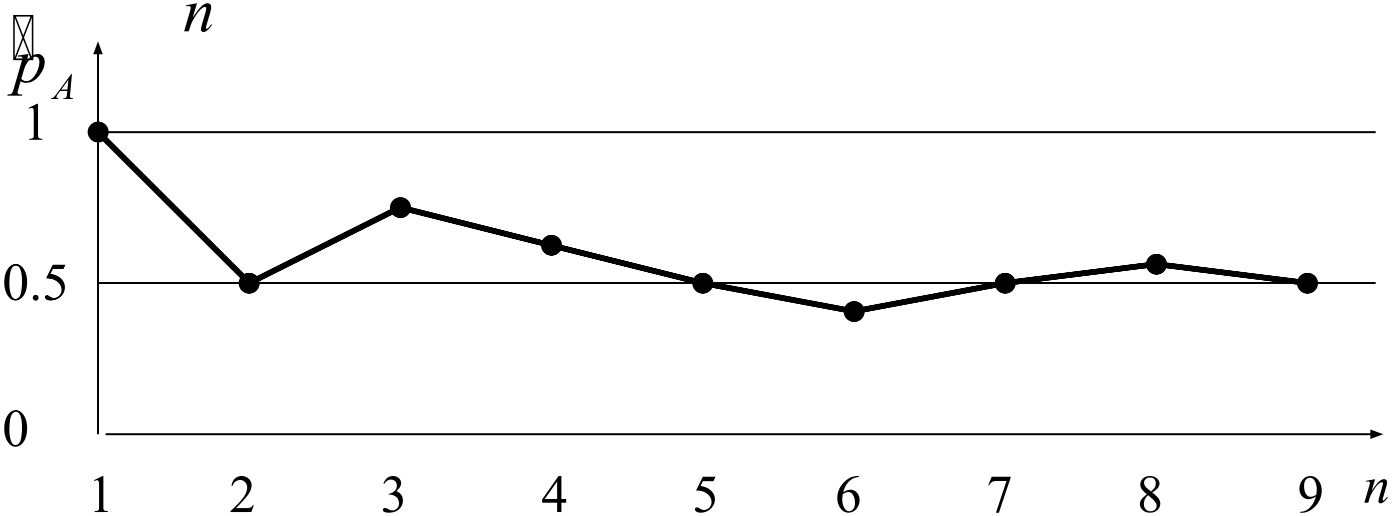
В практических задачах за вероятность события A принимается частота $\hat{p}_A$ при достаточно большом числе испытаний.

Пример: Испытание – бросание монеты.

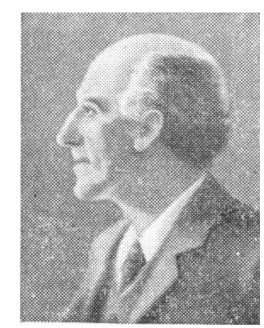
Случайное событие A – «выпадает герб».

n – число подброшенных монет, n_A – число монет, у которых выпал герб.

$\tilde{p}_A = \dfrac{n_A}{n}$ – частота события A.



Карл (Чарльз) Пирсон (1857-1936) – английский математик (математическая статистика).



$$n = 24000, \quad n_A = 12012 \quad \tilde{p}_A = 0.5005 \Rightarrow p(A) = 0.5$$

Классическое определение вероятности

Опр.3. Пусть n – число возможных исходов испытаний, m – число исходов, благоприятствующих событию A. Тогда

$$p(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример:
В пирамиде 10 винтовок, из них 4 – с оптическим прицелом. Какова вероятность события A – «взятая наугад винтовка имеет оптический прицел»?

Решение:
Число исходов $n = 10$.
Число исходов, благоприятствующих событию $m = 4$.
Тогда вероятность события равна

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{10} = 0.4 = 40\%.$$

В3. Теоремы о вероятностях

Т.1. Вероятность **суммы** двух **несовместных** событий A и B вычисляется по формуле $p(A+B)=p(A)+p(B).$

Опр. События A и B называются **независимыми**, если вероятность события A не зависит от события B и наоборот.

Т.2. Вероятность **произведения** двух **независимых** событий A и B равна

$$p(AB)=p(A)\,p(B).$$

Т.3. Вероятность **противоположного** события вычисляется по формуле

$$p(\overline{A})=1-p(A).$$

Это следует из того, что $A+\overline{A}=\Omega,\quad A,\ \overline{A}$ – несовместные.

$$p(A+\overline{A})=p(\Omega).\qquad \text{По теореме 1}\quad \Rightarrow\quad p(A)+p(\overline{A})=1.$$

Пример: Производится стрельба по цели из двух орудий. Вероятность поражения цели из первого орудия равна 0,6, а из второго 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадет **только одно** орудие.

Решение: Введем события:

A_1 – «выстрел из первого орудия поразит цель» $p(A_1)=0.6$;

A_2 – «выстрел из второго орудия поразит цель» $p(A_2)=0.8$.

Рассмотрим событие: C - «только один выстрел поразил цель».

$C = A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2$ **или** $A_1\overline{A_2}$ – событие A_1 произошло **и** соб A_2 не произошло

$\overline{A_1}A_2$ – событие A_1 не произошло **и** соб A_2 произошло

Все события независимые $\Rightarrow$

$$p(A_1\overline{A_2}) = p(A_1)p(\overline{A_2}) = p(A_1)\cdot(1-p(A_2)) = 0,6\cdot 0,2 = 0,12$$

$$p(\overline{A_1}A_2) = p(\overline{A_1})\cdot p(A_2) = \left(1-p(A_1)\right)p(A_2) = 0,4\cdot 0,8 = 0,32.$$

События $A_1\overline{A_2}$, $\overline{A_1}A_2$ несовместные $\Rightarrow$

$$p(C) = p(A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2) = p(A_1\overline{A_2}) + p(\overline{A_1}A_2) = 0.12 + 0.32 = 0.44.$$

Т.4. Вероятность **суммы** двух **произвольных (совместных или несовместных)** событий A и B вычисляется по формулам:

$$1)\quad p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB),\quad 2)\quad p(A+B)=1-p(\overline{A}\,\overline{B}).$$

Пример: Производится стрельба по цели из двух орудий. Вероятность поражения цели из первого орудия равна 0,6, а из второго 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадет **хотя бы одно** орудие.

Решение: Введем события:

A_1 – «выстрел из первого орудия поразит цель» $p(A_1)$=0.6;

A_2 – «выстрел из второго орудия поразит цель» $p(A_2)$=0.8.

Рассмотрим событие: D - «хотя бы один выстрел поразил цель».

$$D = A_1 + A_2$$

$$1)\quad p(D)=p(A_1+A_2)=p(A_1)+p(A_2)-p(A_1A_2)=p(A_1)+p(A_2)-p(A_1)p(A_2)=$$

$$=0.6+0.8-0.6\cdot 0.8=1.4-0.48=0.92$$

$$2)\quad p(D)=p(A_1+A_2)=1-p(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=1-p(\overline{A_1})p(\overline{A_2})=$$

$$=1-\big(1-p(A_1)\big)\big(1-p(A_2)\big)=1-0.4\cdot 0.2=1-0.08=0.92.$$

Т.5. Вероятность **суммы** любого числа **произвольных (совместных или несовместных)** событий вычисляется по формуле

$$p(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - p(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \ldots \overline{A_n})$$

Пример: Четыре взвода выполняют огневую задачу. Вероятность выполнить задачу на отлично у первого взвода равна 0.6, у второго –0.7, у третьего – 0.4, у четвертого – 0.35. Найти вероятность того, что хотя бы один взвод выполнит задачу на отлично.

Решение: Введем события:

A_1 – «первый взвод выполнил задачу на отлично», $p(A_1)$=0.6;
A_2 – «второй взвод выполнил задачу на отлично», $p(A_2)$=0.7;
A_3 – «третий взвод выполнил задачу на отлично», $p(A_3)$=0.4;
A_4 – «четвертый взвод выполнил задачу на отлично», $p(A_4)$=0.35.

Рассмотрим событие: E – «хотя бы один взвод выполнит задачу на отлично».

$$E = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$p(E) = p(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 1 - p(\overline{A_1 A_2 A_3 A_4}) = 1 - p(\overline{A_1})\,p(\overline{A_2})\,p(\overline{A_3})\,p(\overline{A_4}) =$$

$$= 1 - (1-0.6)(1-0.7)(1-0.4)(1-0.35) = 1 - 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.35 = 1 - 0.0468 = 0.9532$$

- **В4. Случайные величины дискретного типа, их закон распределения, числовые характеристики случайных величин**

Опр. 1. **Случайная величина** – это переменная величина, которая в результате испытания может принимать то или иное численное значение.

Примеры:

Число попаданий в цель при нескольких выстрелах, время полета снаряда, число отказов прибора за определенное время и другие.

Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные. Обозначаются большими буквами

Дискретные случайные величины – это величины, принимающие отдельные изолированные значения.

Примеры:

Число бракованных деталей в выборке, число вызовов, поступивших на станции скорой помощи.

Для описания случайной величины применяют закон распределения этой величины.

Закон распределения - это характеристика случайной величины, которая показывает:

1) какие значения может принимать случайная величина;

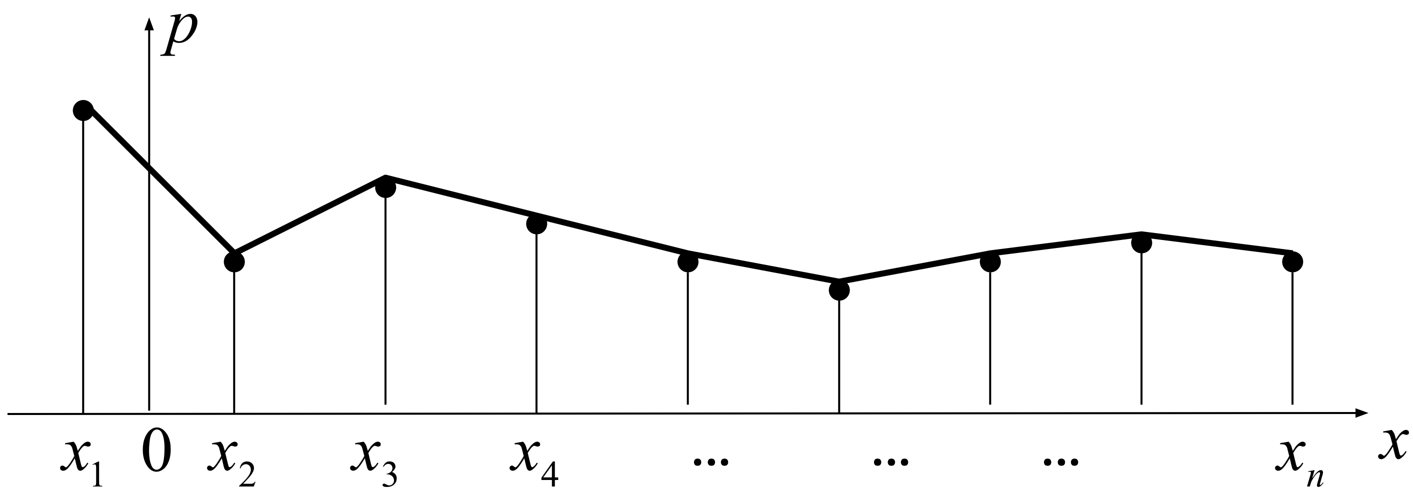
2) вероятность этих значений.

Для дискретной случайной величины законом распределения является **ряд распределения**, имеющий вид таблицы

X	x_1	x_2	...	x_n
$P\{X = x_k\}$	p_1	p_2		p_n

где $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$

Ряд распределения можно изобразить графически в виде **многоугольника распределения**

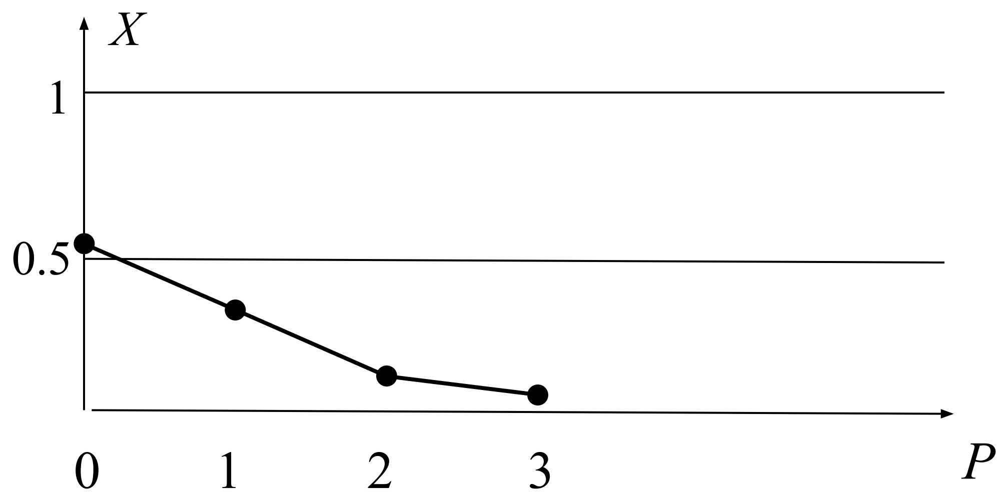


Пример 1:

Производится три выстрела по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,2. Случайная величина - количество попаданий в цель. Построить ряд распределения и многоугольник распределения.

Решение:

X	0	1	2	3
$P\{X=k\}$	$(0{,}8)^3=0{,}512$	$3\cdot(0{,}8)^2\cdot 0{,}2=0{,}384$	$3\cdot(0{,}8)(0{,}2)^2=0{,}096$	$(0{,}2)^3=0{,}008$



Наиболее известными законами распределения дискретной случайной величины являются законы:

1) биноминальный закон, в котором вероятность находится по формуле

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q=1-p,$$

где C_n^k - число сочетаний из n по k находится по формуле

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Разобранный пример – это пример случайной величины, распределенной по биноминальному закону, с параметрами $n=3,\ p=0,2,\ q=0,8.$

2) закон Пуассона (закон редких событий)

$$P\{X=k\}=\frac{a^k}{k!}e^{-a},$$

где $a=np,\ p$ - очень малая вероятность.