Геометрическая оптика

Введение

При определённых условиях, когда мы рассматриваем прохождение света , например, через оптическую систему, где размеры «препятствий» (диафрагмы, оправки линз и т.п.) для световой волны оказываются >>λ, мы вводим понятие светового луча и имеем дело ***с геометрической (или лучевой) оптикой.***

Законы геометрической оптики:

1. Закон прямолинейного распространения света
2. Закон отражения
3. Закон преломления.

Но эти законы можно вывести из общего принципа, носящего название ***принцип Ферма.*** Сам Ферма *(Fermat, 1601-1665)* сформулировал свой принцип так: «Свет при распространении от одной точки к другой выбирает путь, которому соответствует наименьшее время распространения».

$$t = \int_A^B \frac{dS}{v} = \frac{1}{c}\int_A^B ndS$$

Величина $\int_A^B ndS$ носит название – *оптическая длина пути.*

Условие наименьшего времени распространения требует, чтобы вариация этого интеграла равнялась нулю: $\delta \int_A^B ndS = 0$.

Это и есть математическая формулировка принципа Ферма. Из него можно вывести все три закона. Из него следует и *принцип обратимости*

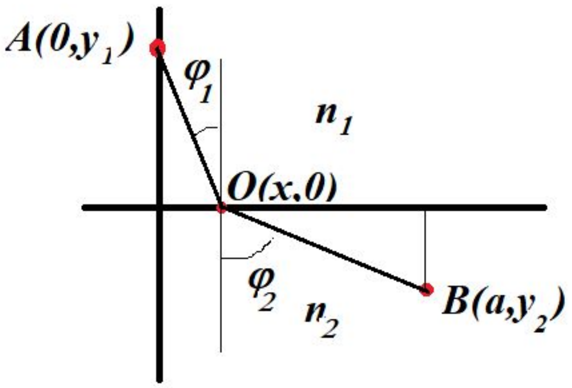


Рис.1а.

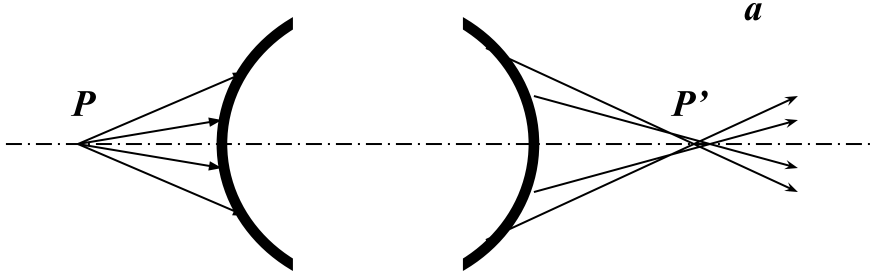
$$\left(n_1\sqrt{y_1^2+x^2}+n_2\sqrt{y_2^2+(a-x)^2}\right)'=0$$

$$\frac{n_1x}{\sqrt{y_1^2+x^2}}-\frac{n_2(a-x)}{\sqrt{y_2^2+(a-x)^2}}=0$$

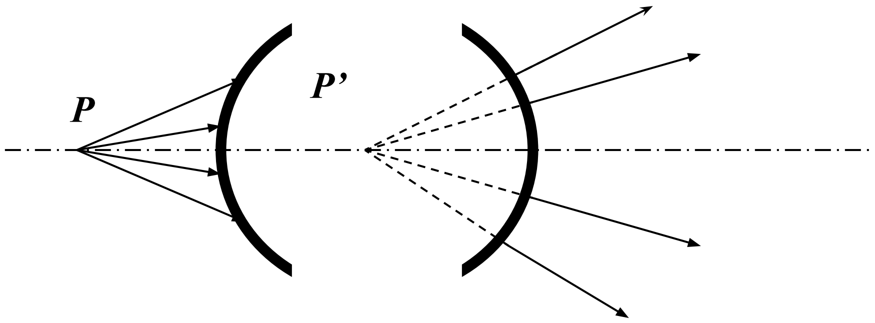
$$n_1 sin\varphi_1 = n_2 sin\varphi_2$$

Оптическая система

а



б



Матричный метод расчёта оптических систем.

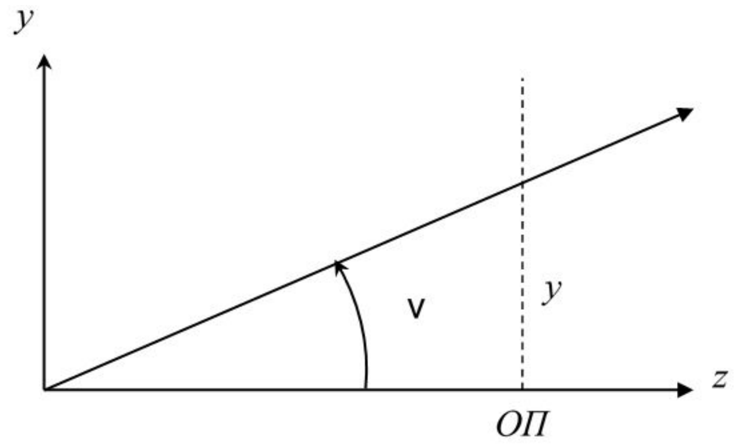


Рис.5

$$y_2 = Ay_1 + BV_1$$

$$V_2 = Cy_1 + DV_1$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = MK_1$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad K_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

Матрица перемещения

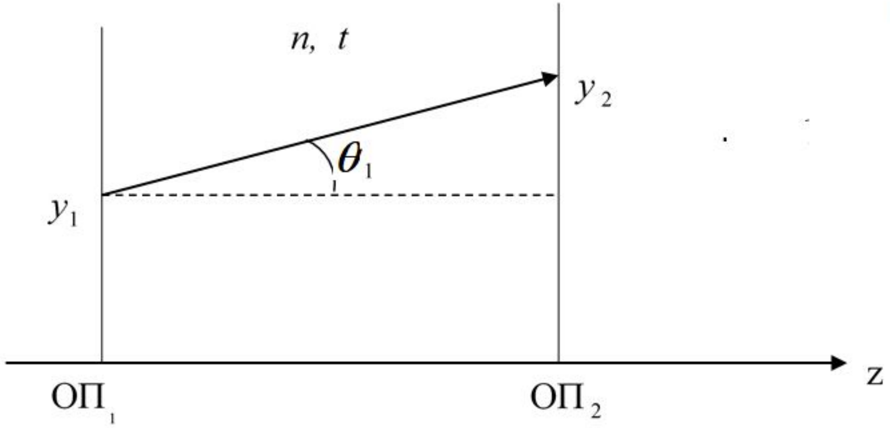


Рис.6

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{t}\boldsymbol{\vartheta}_1 \qquad T = t/n,$$

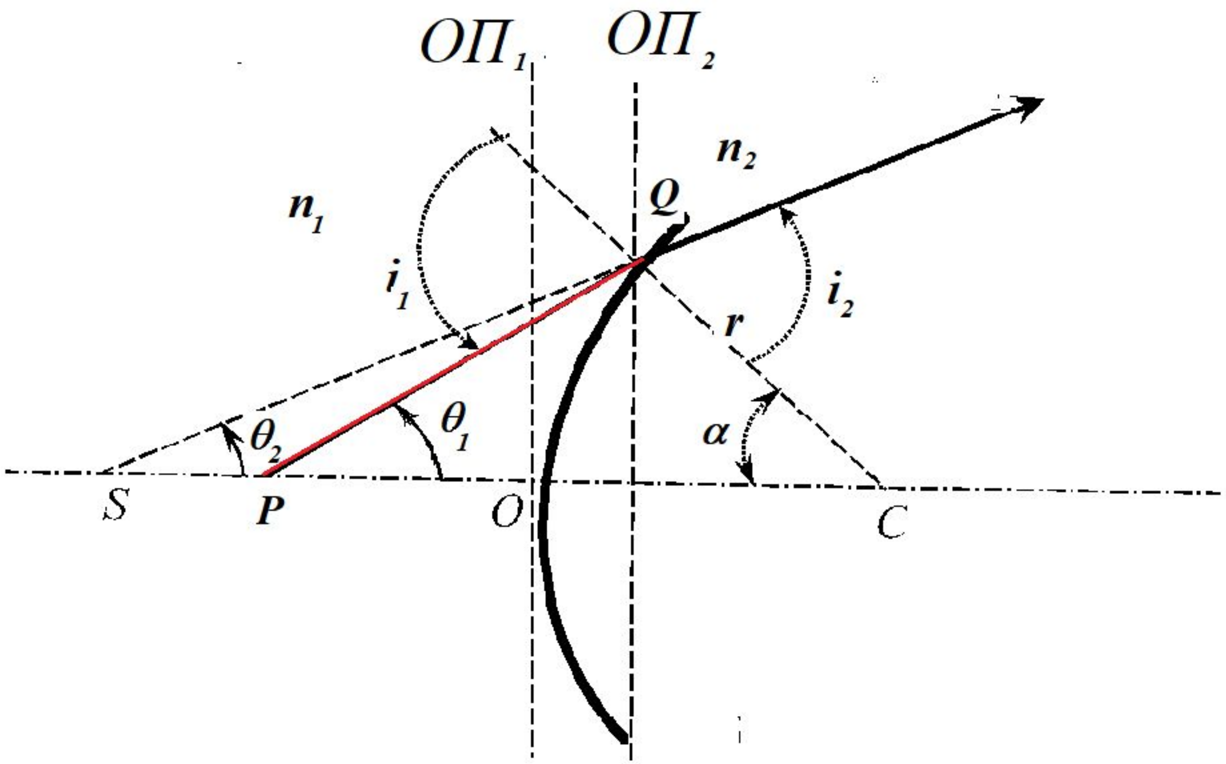
$$y_2 = y_1 + TV_1$$

$$V_2 = V_1$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{T} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Матрица преломления



$$n_1 i_1 = n_2 i_2.$$

$$i_1 = \vartheta_1 + \alpha = \vartheta_1 + \frac{y_1}{r}$$

$$i_2 = \vartheta_2 + \alpha = \vartheta_2 + \frac{y_1}{r}.$$

$$n_1\left(\vartheta_1 + \frac{y_1}{r}\right) = n_2\left(\vartheta_2 + \frac{y_1}{r}\right)$$

или $V_1 + n_1\frac{y_1}{r} = V_2 + n_2\frac{y_1}{r}$

$$V_2 = -\frac{n_2 - n_1}{r} y_1 + V_1$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{-(n_2 - n_1)}{r} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

$$\Re = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p & 1 \end{pmatrix}$$

$$p = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Матрица преобразования лучей для оптической системы

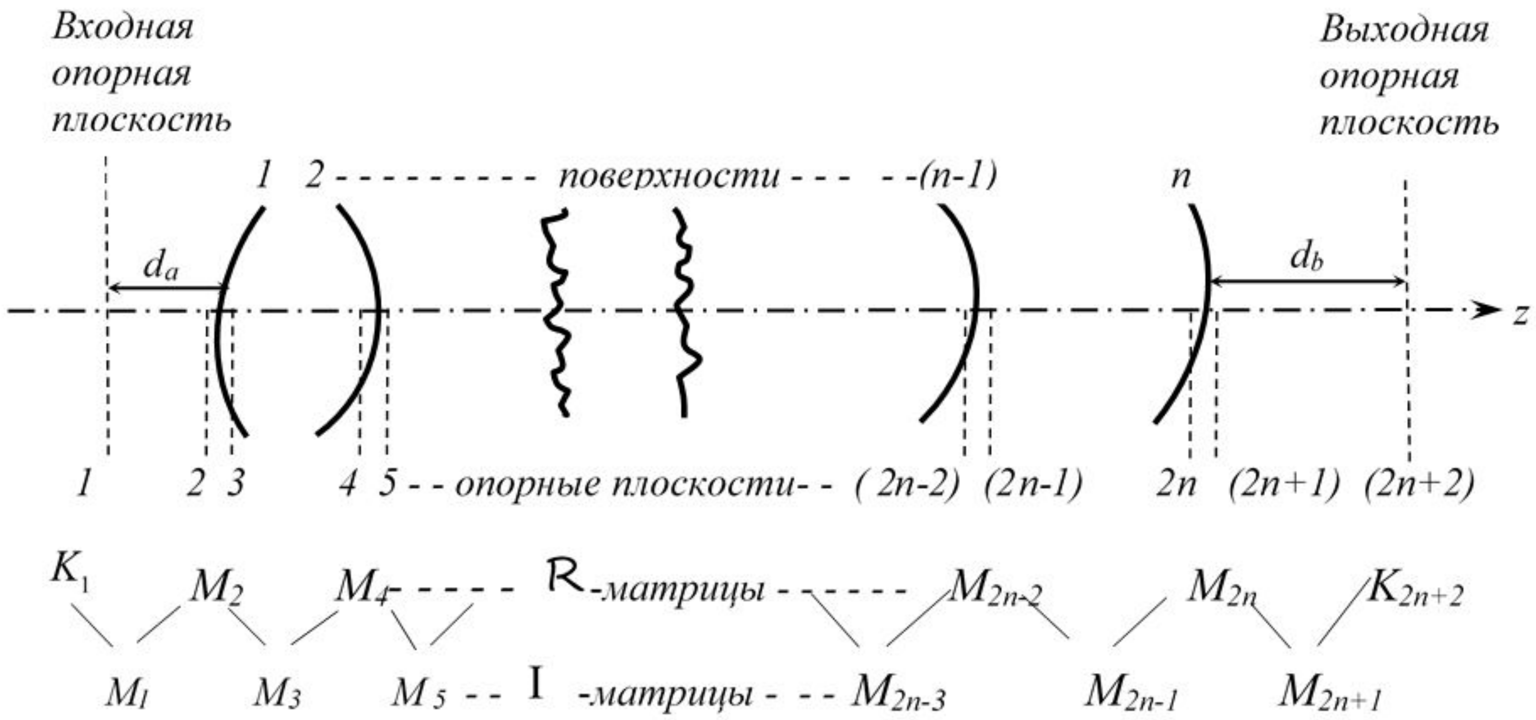


Рис.8

$$K_2 = M_1 K_1 \;\; K_3 = M_2 K_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;\; K_{2n+1} = M_{2n} K_{2n}$$

$$K_{2n+2} = MK_1,$$

$$M = M_{2n+1}M_{2n}\dots M_1$$

$$M = \begin{pmatrix} AB \\ CD \end{pmatrix}$$

$$AD - BC = 1$$

значит **только три элемента матрицы независимы**.

Вид матрицы не зависит от параметров луча, следовательно, преобразование любого луча описывается одной и той же матрицей, которая и характеризует данную оптическую систему.

Таким образом: **Всю оптическую систему, какой бы сложной она ни была, мы заменяем матрицей, содержащей всего три независимых параметра.**

Расчёт параметров входного луча по заданному выходному

$$K_{\text{вых}} = MK_{\text{вх}}$$

$$M^{-1}M = MM^{-1} = E$$

$$M^{-1}K_{\text{вых}} = M^{-1}MK_{\text{вх}} = K_{\text{вх}}$$

Если $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ $\qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$

Линза.

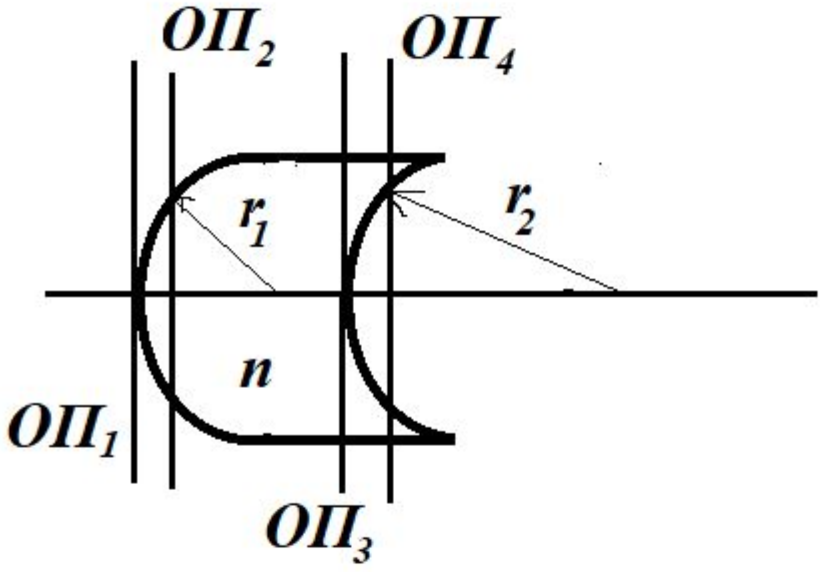


Рис.1.б.

$$p_1 = \frac{(n-1)}{r_1}$$

$$p_2 = \frac{(1-n)}{r_2}.$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 - p_1 \frac{d}{n} & \frac{d}{n} \\ -p_1 - p_2 + p_1 p_2 \frac{d}{n} & 1 - p_2 \frac{d}{n} \end{pmatrix}$$

Тонкая линза.

d=0

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(p_1 + p_2) & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p & 1 \end{pmatrix}.$$

$$p = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Пусть $\boldsymbol{B=0}$

Свойства оптической системы

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB \\ CD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ V_1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= Ay_1 + BV_1 \\ V_2 &= Cy_1 + DV_1 \end{aligned}\right\}$$

$$y_2 = Ay_1$$

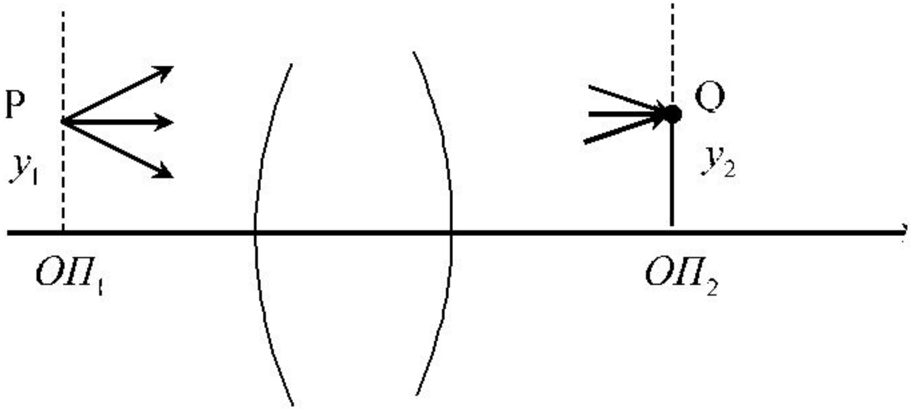


Рис.9.

*1.***Гомоцентрический пучок преобразуется в гомоцентрический. Точка** Q **является изображением точки** P.

2. **Если предмет лежит в плоскости, перпендикулярной оси системы,** (плоскость $ОП_1$), **его изображение тоже лежит в плоскости, перпендикулярной оси системы,** (плоскость $ОП_2$). Плоскости $ОП_1$ и $ОП_2$ будут ***взаимно сопряженными*** плоскостями.

3. **Отношение** $\gamma = y_2 / y_1 = A$ **называется** ***линейным увеличением системы***. Если $\gamma > 0$ – изображение ***прямое***, если $\gamma < 0$ – ***обратное***. Так как AD=1, то D=1/A.

4. **Изображение подобно предмету** , так как $\gamma = A = const$ – увеличение не зависит от y_1.

5. **Чтобы найти положение изображения какой-либо точки, нужно поместить первую опорную плоскость на месте объекта, вторую – на некотором расстоянии от оптической системы, найти матрицу такой конфигурации и в полученной матрице положить B = 0.**

Пример – изображение в тонкой линзе.

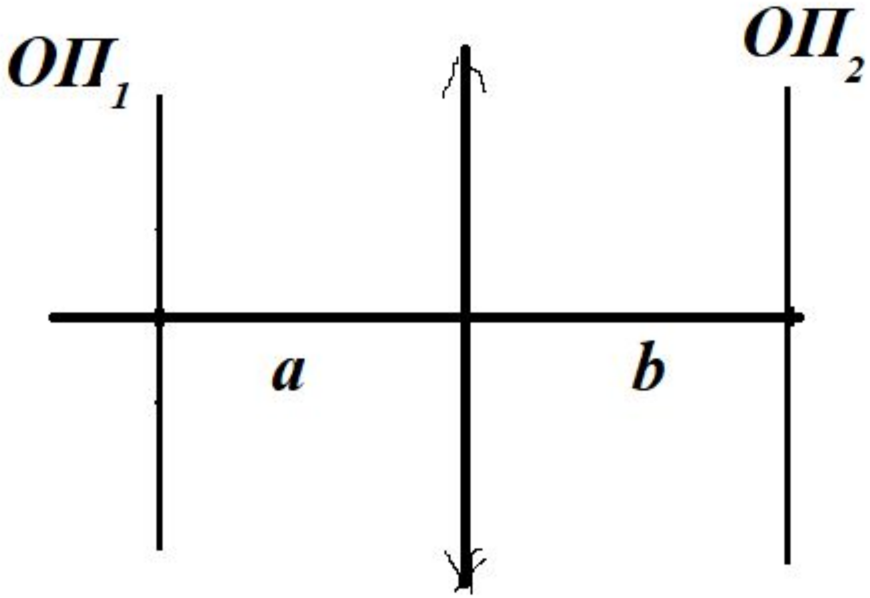


Рис.1.в.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - bp & a + b - abp \\ -p & 1 - ap \end{pmatrix}$$

Положив B=a+b-abp=0

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = p$$

$$\gamma = A = 1 - bp = 1 - b\,\frac{a+b}{ab}$$

$$\gamma = -\frac{b}{a}$$

Фокусы оптической системы. Фокальные плоскости.

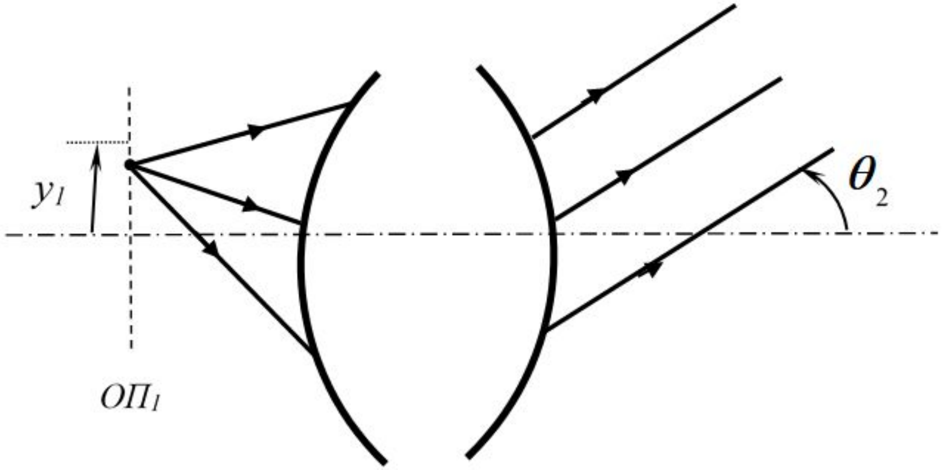


Рис.11.

Пусть ***D=0***

$$V_2 = Cy_1$$

Плоскость $ОП_1$ называется в этом случае ***первой (передней) фокальной плоскостью системы,*** а точка y_1– ***первым (передним) фокусом.*** Точка пересечения передней фокальной плоскости осью системы называется ***передним главным фокусом.*** Все лучи, проходящие через передний главный фокус системы (y_1=0), выходят из нее параллельно оптической оси θ_2=0.

Если положение опорных плоскостей выбрано так, что А=0, то $y_2 = BV_1$.

Все лучи, входящие в систему под одним и тем же углом θ_1 пройдут через одну и ту же точку y_2 на выходной опорной плоскости $ОП_2$. Таким образом, система собирает пучок параллельных лучей в фокус в точку, расположенную на плоскости $ОП_2$, которая называется ***второй (задней) фокальной плоскостью оптической системы***. Точка пересечения задней фокальной плоскости осью системы называется ***задним главным фокусом***. В этой точке собираются лучи, входящие в систему параллельно оптической оси

Телескопическая система. Угловое увеличение.

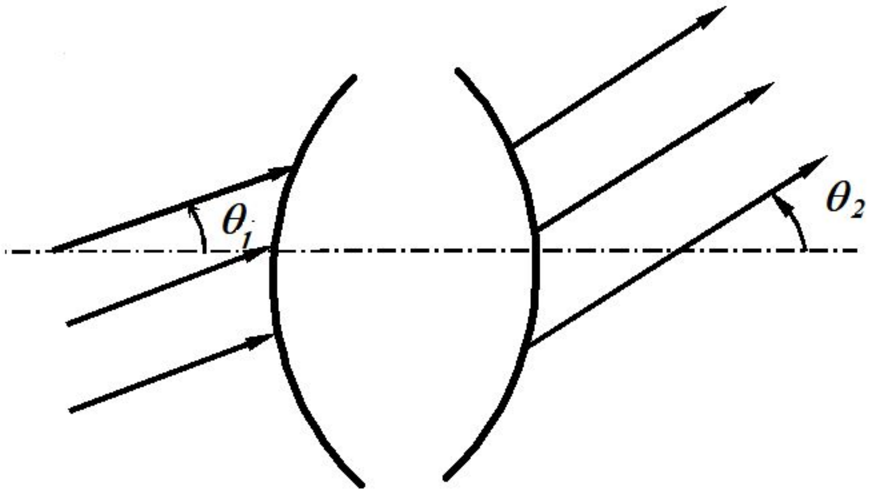


Рис.12.

Пусть ***C=0***

$$V_2 = DV_1$$

Если ***n***=1 $\vartheta_2 = D\vartheta_1$.

Такая система линз, которая преобразует параллельный пучок лучей в параллельный же, называется ***афокальной*** или ***телескопической*** системой. В этом случае отношение углов называется ***угловым увеличением*** оптической системы:

$$\beta = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = D$$

Главные плоскости. Фокусные расстояния.

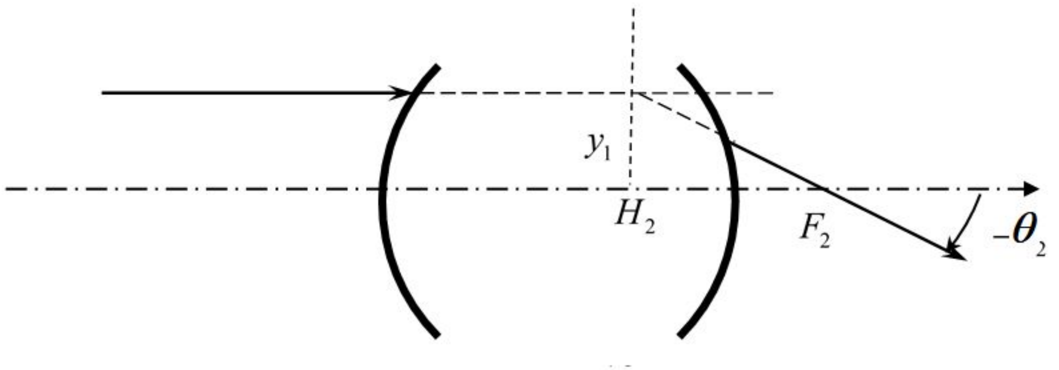


Рис.13.

. Плоскость H_2, проведенная через эту точку перпендикулярно оси, называется ***второй (задней) главной плоскостью*** оптической системы, а точка пересечения ее с осью называется ***второй (задней) главной точкой***.

зок $H_2F_2 = f_2$.

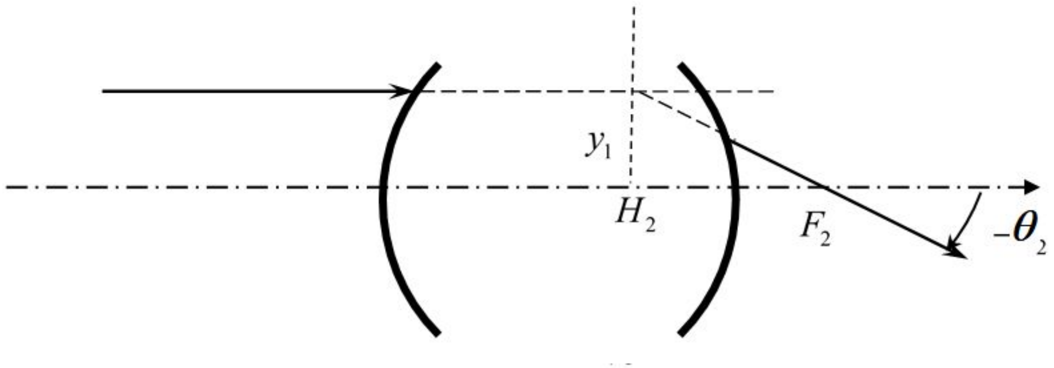


Рис.13.

$$V_1 = 0$$

$$V_2 = Cy_1 = n_2\vartheta_2$$

Из чертежа: $-\vartheta_2 = \frac{y_1}{f_2}$,

$$f_2 = -\frac{n_2}{C}$$

Отрезок f_2 (его длина и направление) не зависит от y_1, он характеризует систему. Он называется ***заднее фокусное расстояние*** системы.

$p = n_2/f_2$ называется ***оптической силой*** системы и $C = -p$.

$$f_2 = -\frac{1}{C}$$

Найдем точку пересечения луча «до» и «после» – это будет ***передняя (первая) главная точка*** – опустим перпендикуляр на ось (через него проходит ***передняя главная плоскость***) и найдем отрезок H_1F_1 (на нашем чертеже он отрицательный, так как направление его – против направления распространения света) – ***переднее фокусное расстояние*** оптической системы.

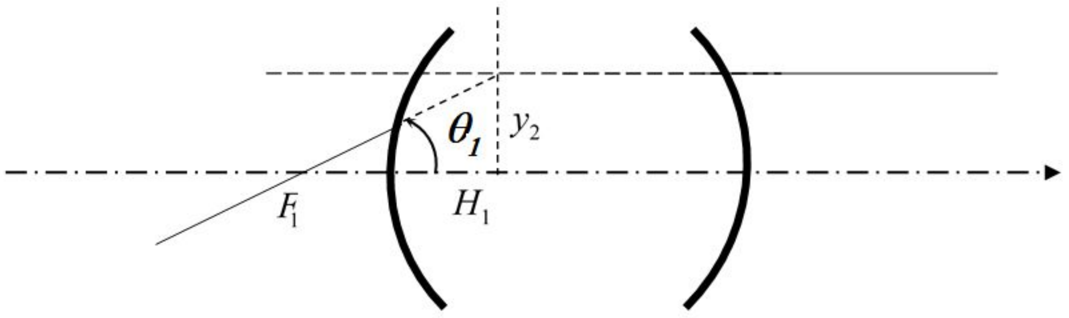


Рис.14.

Из чертежа $\vartheta_1 = \frac{V_1}{n_1} = \frac{y_2}{-f_1}$. Или $f_1 = -\frac{y_2 n_1}{V_1}$.

Обратное преобразование луча имеет вид $K_{вх} = M^{-1}K_{вых}$,

$$y_1 = Dy_2 - BV_2$$

$$V_1 = -Cy_2 + AV_2$$

V_2=0 и значит $V_1 = -Cy_2$.

Таким образом, $f_1 = \frac{n_1}{C}$

$$f_1 = \frac{1}{C} \qquad f_1 = -f_2$$

Кардинальные точки. Построение изображения

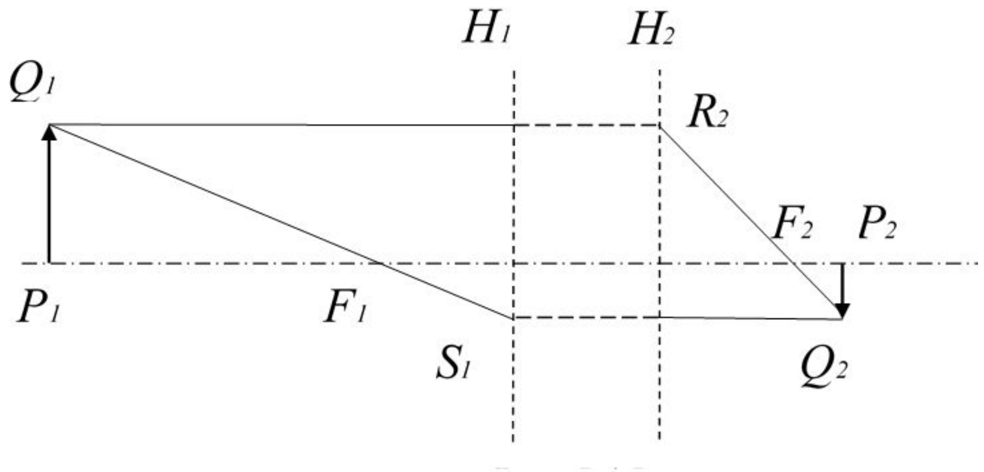


Рис.15.

Главные плоскости оптической системы — это сопряженные плоскости с единичным коэффициентом увеличения.

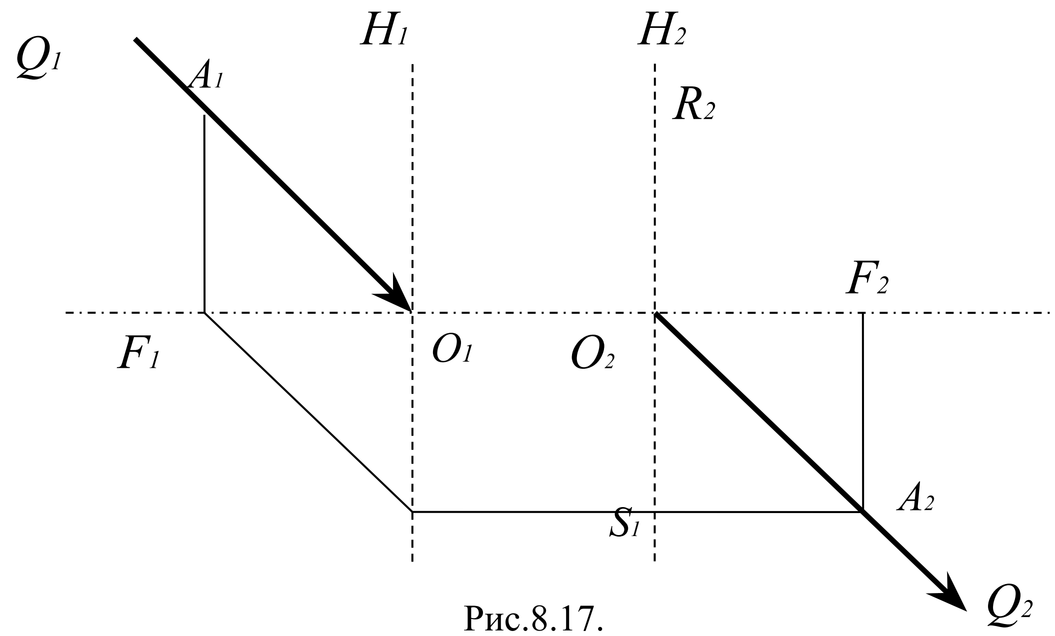


Рис.8.17.

Построение изображения в тонкой линзе.

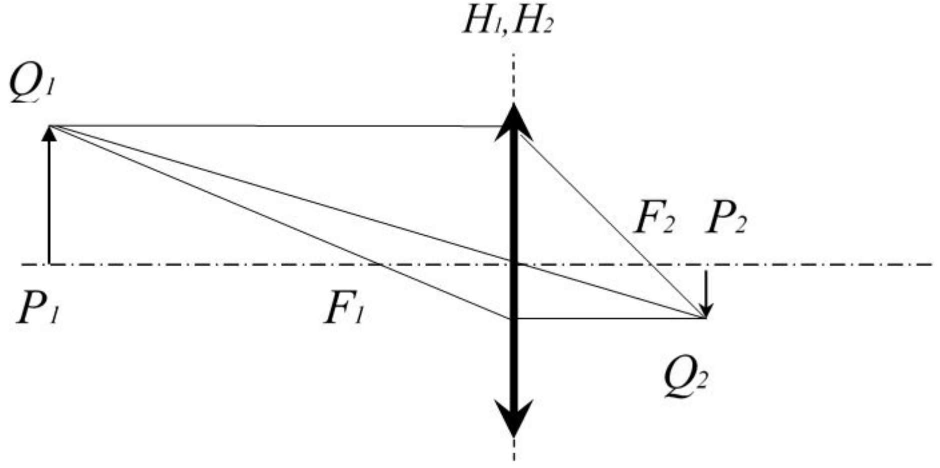


Рис.16.