Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Волгоградский политехнический колледж имени В.И.Вернадского»

Парадокс дней рождения

Выполнил:
Кочетов
Андрей Михайлович
студент группы 2КСК

Волгоград 2016 г.

Что это такое?

- ***Парадо́кс дней рожде́ния*** — утверждение, гласящее, что в группе, состоящей из 23 или более человек, вероятность совпадения дней рождения (число и месяц) хотя бы у двух людей превышает 50 %. Например, если в классе 23 ученика или более, то более вероятно то, что у кого-то из одноклассников дни рождения придутся на один день, чем то, что у каждого будет свой неповторимый день рождения.

  Для 60 и более человек вероятность такого совпадения превышает 99 %, хотя 100 % она достигает, согласно принципу Дирихле, только тогда, когда в группе не менее 367 человек (ровно на 1 больше, чем число дней в високосном году; с учётом високосных лет).

- Ключевым моментом здесь является то, что утверждение парадокса дней рождения говорит именно о совпадении дней рождения у ***каких-либо*** двух членов группы.

Одно из распространённых заблуждений состоит в том, что этот случай путают с другим — похожим, на первый взгляд, — случаем, когда из группы выбирается один человек и оценивается вероятность того, что у кого-либо из других членов группы день рождения совпадёт с днем рождения выбранного человека. В последнем случае вероятность совпадения значительно ниже.

Расчёт вероятности

Рассчитаем сначала, какова вероятность **p** (*n*) того, что в группе из *n* человек дни рождения всех людей будут различными. Если ***n* > 365**, то в силу принципа Дирихле вероятность равна нулю. Если же ***n* ≤ 365**, то будем рассуждать следующим образом. Возьмём наугад одного человека из группы и запомним его день рождения. Затем возьмём наугад второго человека, при этом вероятность того, что у него день рождения не совпадёт с днем рождения первого человека, равна **1 — 1/365**. Затем возьмём третьего человека, при этом вероятность того, что его день рождения не совпадёт с днями рождения первых двух, равна **1 — 2/365**. Рассуждая по аналогии, мы дойдём до последнего человека, для которого вероятность несовпадения его дня рождения со всеми предыдущими будет равна **1 — (*n* — *1*)/365**. Перемножая все эти вероятности, получаем вероятность того, что все дни рождения в группе будут различными:

$$\bar{p}(n) = 1\cdot\left(1-\frac{1}{365}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{365}\right) = \frac{365\cdot 364\cdots(365-n+1)}{365^n} = \frac{365!}{365^n(365-n)!}.$$

Тогда вероятность того, что хотя бы у двух человек из ***n*** дни рождения совпадут, равна:

$$p(n) = 1 - \bar{p}(n).$$

Значение этой функции превосходит **1/2** при ***n* = 23** (при этом вероятность совпадения равна примерно 50.7 %). Вероятности для некоторых значений ***n*** иллюстрируются следующей таблицей:

n	p(n)
10	12%
20	41%
30	70%
50	97%
100	99.99996%
200	99.9999999999999999999999999998%
300	$(1 - 7\times10^{-73}) \times 100\%$
350	$(1 - 3\times10^{-131}) \times 100\%$
367	100%

Альтернативный метод

Вероятность совпадения дней рождения в группе можно также рассчитать с использованием формул *комбинаторики*. Представим, что каждый день года — это одна буква в алфавите, и алфавит состоит из 365 букв. Дни рождения ***n*** человек могут быть представлены строкой, состоящей из ***n*** букв такого алфавита. Общее число таких строк равно:

$$n_{\mathbf{total}} = 365^n.$$

Общее число строк, в которых буквы не повторяются, составит:

$$n_{\mathbf{unique}} = \frac{365!}{(365-n)!}.$$

Если строки выбираются случайно (с равномерным распределением), вероятность выбора строки, в которой хотя бы две буквы совпадут, равна

$$p(n) = 1 - \frac{n_{\text{unique}}}{n_{\text{total}}} = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n} \text{ при } n \leqslant 365 \text{ и}$$

$$p(n) = 1 \text{ при } n > 365.$$

Поскольку

$$\frac{\left(\frac{365!}{(365-n)!}\right)}{365^n} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365-n+1)}{365^n} = \frac{365}{365}\frac{364}{365}\frac{363}{365}\cdots\frac{365-n+1}{365} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right).$$

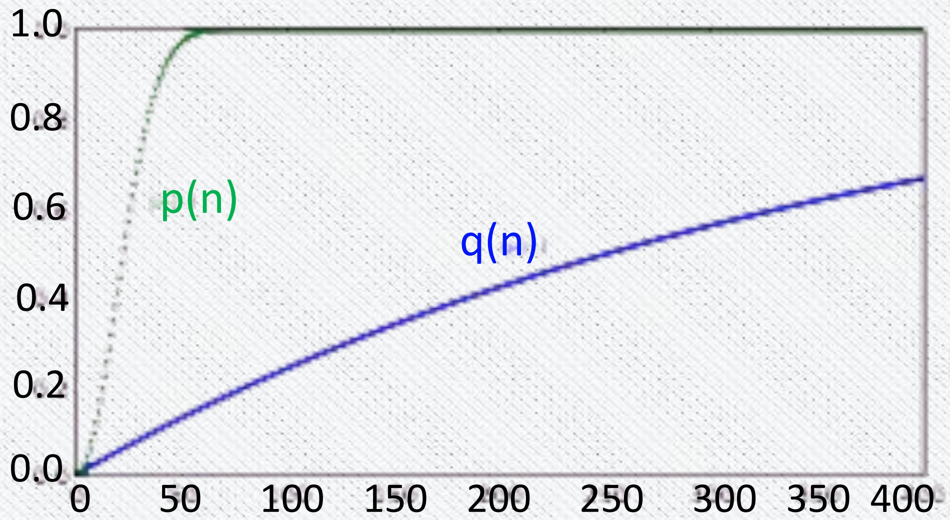
Родившиеся в один день с заданным человеком

Сравним вероятность ***p*(*n*)** с вероятностью того, что в группе из ***n*** человек день рождения какого-либо человека из группы совпадёт с днём рождения некоторого заранее выбранного человека, не принадлежащего группе. Эта вероятность равна:

$$q(n) = 1 - \left(\frac{365 - 1}{365}\right)^n.$$

Подставляя ***n* = 23**, получаем ***q*(*n*) ≈ 6.12%.** Для того, чтобы вероятность ***q*(*n*)** превысила **50 %**, число людей в группе должно быть не менее **253 (*q*(252) ≈ 49.91%; *q*(253) ≈ 50.05%**. Это число больше, чем половина дней в году **365/2 = 182.5;** так происходит из-за того, что у остальных членов группы дни рождения могут совпадать между собой, и это уменьшает вероятность ***q*(*n*).**

Сравнение графиков функций : $p(n)$ и $q(n)$.



Несколько типов людей

Выше парадокс дней рождения был представлен для одного «типа» людей. Можно обобщить задачу, введя несколько «типов», например, разделив людей на мужчин (***m***) и женщин (***n***). Подсчитаем вероятность того, что хотя бы у одной женщины и у одного мужчины совпадают дни рождения (совпадение дней рождения у двух женщин или у двух мужчин не учитываются):

$$p_0 = 1 - \frac{1}{d^{m+n}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} S_2(m,i) S_2(n,j) \prod_{k=0}^{i+j-1} (d-k).$$

где ***d*** = 365 и S_2() — числа *Стирлинга второго рода*. Интересно, что нет однозначного ответа на вопрос о величине ***n***+***m*** для заданной вероятности. Например, вероятность 0.5 даёт как набор из 16 мужчин и 16 женщин, так и набор из 43 мужчин и 6 женщин

Близкие дни рождения

Максимальное различие дней рождения, количество дней	Необходимое кол-во людей
1	23
2	14
3	11
4	9
5	8
6	8
7	7
8	7

Таким образом, вероятность того, что даже в группе из 7 человек дни рождения хотя бы у двух из них будут различаться не более чем на неделю, превышает 50 %.

Спасибо за внимание !!!