Логические основы модели Раша

План лекции

1. Модель Раша – ключевой аспект теории измерения латентных переменных

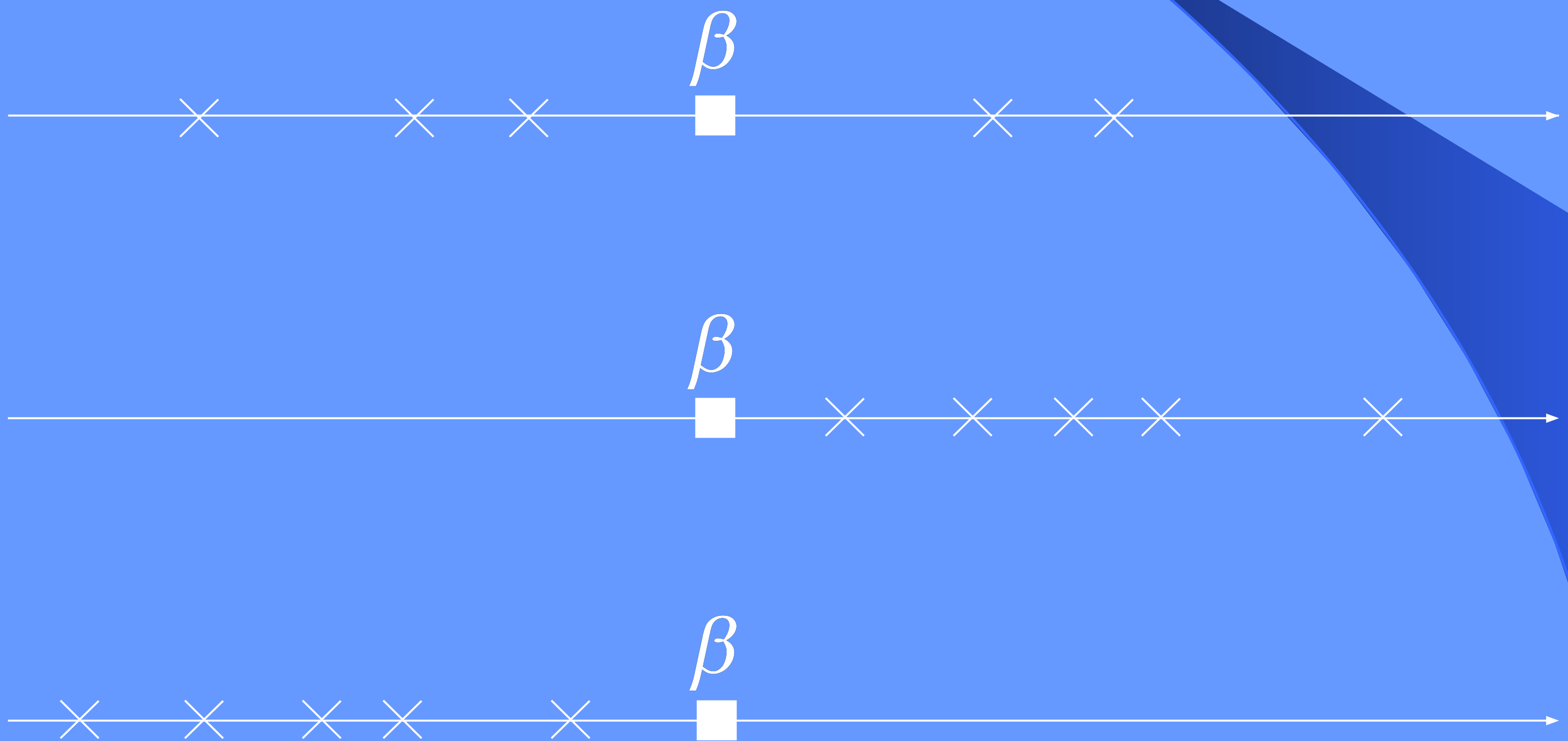
2. История построения модели

3. Формальные предпосылки построения модели

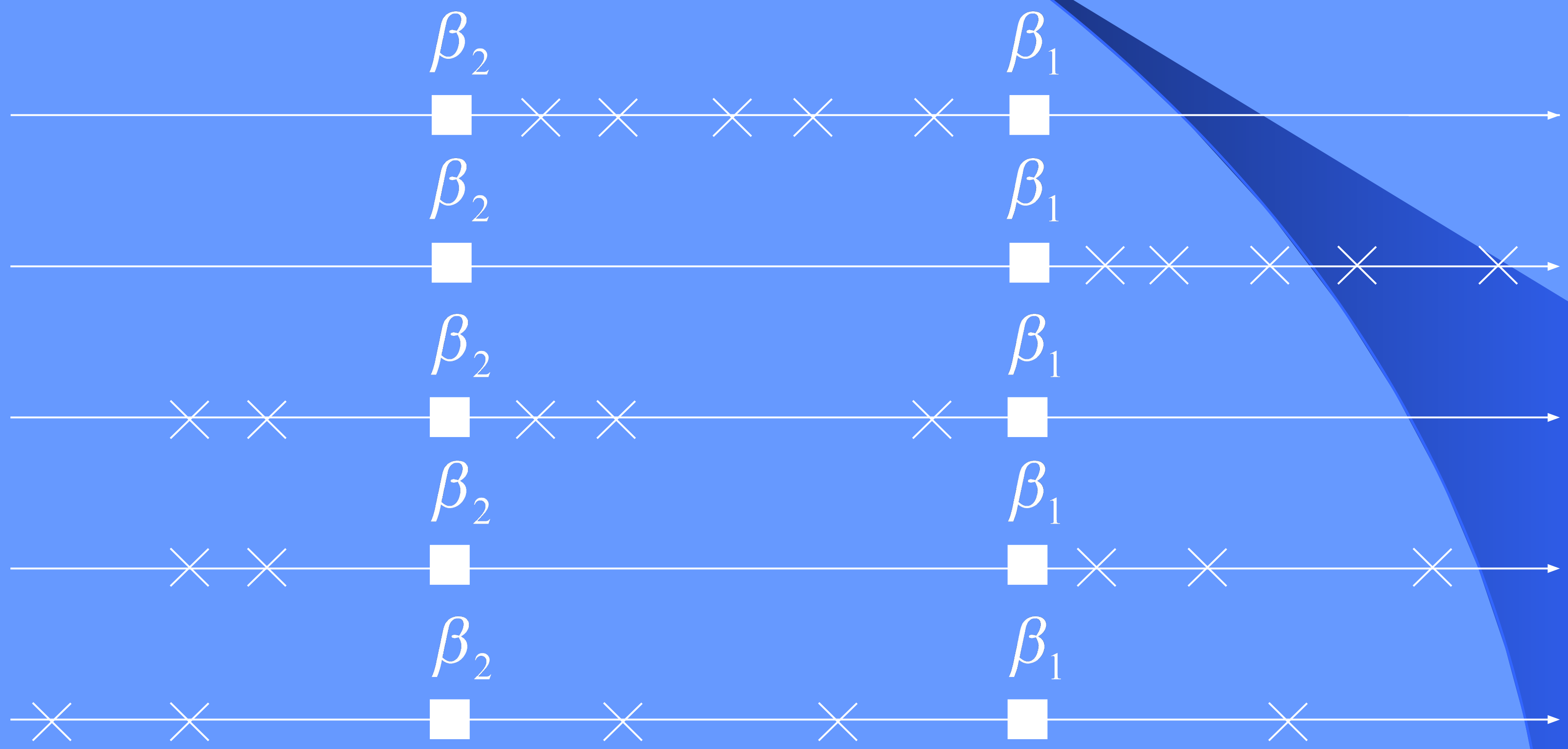
4. Логические основы построения модели

Латентная переменная

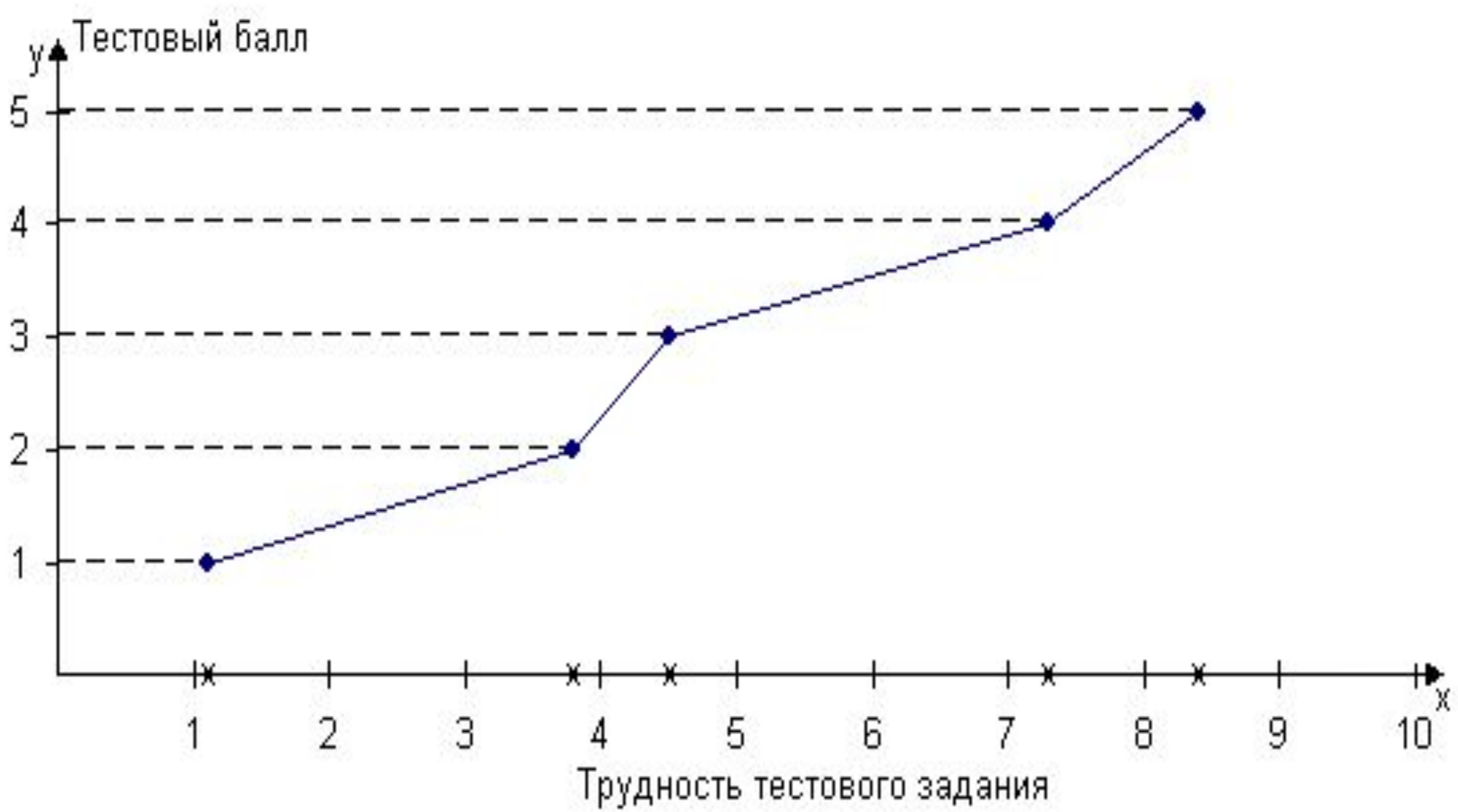
это конструкт (теоретический), который представляет интерес для исследователя



Расположение индивидов и тестовых заданий на линейном континууме



Нелинейность тестового балла



Вместо обоснования модели …

«логистическая модель используется наиболее широко, так как она специально предназначена для тестов» [Дружинин В.К., с. 193];

«… у G. Rasch возникла идея выразить вероятность правильного ответа на задание посредством так называемой логистической функции» [Аванесов В.С., с. 182];

«Простейшая модель вероятности успеха … предложена датским математиком Рашем» [Нейман Ю.М., Хлебников В.А., с. 12] и др.

«G. Rasch удалось предложить удачную форму связи между параметрами» [Челышкова М.Б. (2001), с. 61] и др.

Первое применение модели Раша - измерение прогресса школьников в чтении

Ключевые требования:

- при каждом тестировании должны использоваться различные тексты (тесты);

- тексты должны соответствовать уровню подготовленности испытуемого – они должны быть ни слишком трудными, ни слишком легкими;

- оценки подготовленности должны измеряться на одной и той же шкале.

В качестве статистики выбрано число ошибок при чтении.

Схема назначения текстов в тесте (по возрастающей трудности)

Возраст/тест	1	2	3	4	5	6	7
7	+-	+-					
8		+-	+-				
9			+-	+-			
10				+-	+-		
11					+-	+-	
12						+-	+-

Ожидаемые результаты при назначении тестов с возрастающей трудностью

Возраст/тест	1	2	3	4	5	6	7
7	+-	+-	--	--	--	--	--
8	++	+-	+-	--	--	--	--
9	++	++	+-	+-	--	--	--
10	++	++	++	+-	+-	--	--
11	++	++	++	++	+-	+-	--
12	++	++	++	++	++	+-	+-

Гипотеза Георга Раша

В качестве гипотезы (на основе многочисленных данных и диаграмм) Георг Раш предположил, что среднее число ошибок можно представить в виде

$$Ave[x_{pt}] = \frac{D_t}{B_p}$$

где $Ave[x_{pt}]$ среднее число ошибок, которое сделает p-ый школьник с уровнем подготовленности B_p при чтении t-ого текста с трудностью D_t.

Сравнение двух тестов по трудности

В качестве примера сравним по трудности тест 1 и тест 2, которые были пройдены *p*-ым испытуемым.

$$\frac{x_{p1}}{x_{p2}} = \left[\frac{D_1}{B_p}\right] : \left[\frac{D_2}{B_p}\right] = \frac{D_1}{D_2}$$

Оказалось, что сравнение двух тестов по трудности не зависит от уровня подготовленности испытуемых, которые их прошли.

Обобщение Георга Раша

Некоторый текст может быть выбран как стандарт, и затем различные тексты можно откалибровать относительно этого стандарта.

Испытуемым можно дать любой из текстов
D_1
для чтения, и их уровень подготовки будет измерен на одной и той же шкале.

Исходя из этого относительные трудности могут быть выражены в логарифмической шкале:

$$\delta_i = \log\left(D_i\right)$$

Формальные предпосылки модели Раша

$$\text{если} \quad (\beta_v - \delta_i) > 0 \quad \text{то} \quad P\{x_{vi} = 1\} > 0.5$$

$$\text{если} \quad (\beta_v - \delta_i) < 0 \quad \text{то} \quad P\{x_{vi} = 1\} < 0.5$$

$$\text{если} \quad (\beta_v - \delta_i) = 0 \quad \text{то} \quad P\{x_{vi} = 1\} = 0.5$$

$$0 \le P\{x_i = 1\} \le 1$$

$$-\infty \le (\beta_v - \delta_i) \le +\infty$$

$$0 \le e^{\beta_v - \delta_i} \le +\infty$$

$$0 \le \frac{e^{(\beta_v - \delta_i)}}{1 + e^{(\beta_v - \delta_i)}} \le 1$$

$$P\{x_{vi} = 1 | \beta_v, \delta_i\} = \frac{e^{(\beta_v - \delta_i)}}{1 + e^{(\beta_v - \delta_i)}}$$

Иллюстрация модели Раша

Индивиды	Задания
1	1111111….1101
2	1111111….1010
…	…
N	1111110….0100

β	□	p
4	0	0,98
3	0	0,95
2	0	0,88
1	0	0,73
0	0	0,50

$$P_{vi} = \frac{e^{(\beta_v - \delta_i)}}{1 + e^{(\beta_v - \delta_i)}}$$

Отношение шансов на успех *l*-ого и *m*-ого студентов

$$P\{X_{ij}=1\,|\,\beta_i,\delta_j\}=\frac{e^{(\beta_i-\delta_j)}}{1+e^{(\beta_i-\delta_j)}}$$

$$Q_{ij}=\{X_{ij}=0\,|\,\beta_i,\delta_j\}=1-\frac{e^{(\beta_i-\delta_j)}}{1+e^{(\beta_i-\delta_j)}}=\frac{1}{1+e^{(\beta_i-\delta_j)}}$$

$$\frac{P_{ij}}{Q_{ij}}=\frac{\dfrac{e^{(\beta_i-\delta_j)}}{1+e^{(\beta_i-\delta_j)}}}{1-\dfrac{e^{(\beta_i-\delta_j)}}{1+e^{(\beta_i-\delta_j)}}}=e^{\beta_i-\delta_j}$$

$$\frac{e^{\beta_l-\delta_j}}{e^{\beta_m-\delta_j}}=e^{\beta_l-\beta_m}$$

Вычисление вероятности правильного ответа

$$\text{если} \quad \beta_v = 6, \delta_i = 4, \text{то } P\{x_{vi} = 1 | \beta_v, \delta_i\} = \frac{e^{6-4}}{1+e^{6-4}} = \frac{e^2}{1+e^2} = \frac{7.39}{8.39} = 0.88$$

$(\beta_v - \delta_i)$	Вероятность Правильного ответа
5	0,99
4	0,98
3	0,95
2	0,88
1	0,73
0	0,50
-1	0,27
-2	0,12
-3	0,05
-4	0,02
-5	0,01

Предпосылки конструирования модели измерения

При заданных Bv и Di отношение (odds) Bv / Di является мультипликативным, вероятность правильного ответа равна

$$\frac{(B_v / D_i)}{1+(B_v / D_i)}$$

Для перехода к логарифмически линейной метрике используется преобразование

$$\beta_v = \ln B_v \qquad \text{или} \qquad B_v = e^{\beta_v}$$

$$\delta_v = \ln D_i \qquad \text{или} \qquad D_i = e^{S_i}$$

$$e^{\beta_v - \delta_i} = \frac{B_v}{D_i}$$

логлинейная метрика мультипликативная метрика

Логические основы модели Раша

Простейшая модель Раша имеет вид

$$p_{vi} = \frac{e^{\beta_v - \delta_i}}{1 + e^{\beta_v - \delta_i}}$$

где p_{vi} – вероятность правильного ответа v-го испытуемого на i-ое задание;

β_v – уровень знаний v-го испытуемого;

δ_i – уровень трудности i-го задания.

Для иллюстрации – «прыжки в высоту»

n-ый прыгун в высоту пытается «взять» различные высоты (i = 1, 2, …, L).

При «взятии» i-ой высоты возможны три исхода:

- высота взята ($x_{ni} = 1$),

- высота не взята ($x_{ni} = 0$),

- высота пропущена (x_{ni} = -).

Попытки n-ого прыгуна преодолеть все L высот представляются в виде вектора (1, 1, -, 0, 1, …, 0), где «1» обозначает успешную попытку, «0» обозначает неудачную попытку, а «-» обозначает то, что прыгун пропустил данную высоту.

Сравнение прыгунов и прогноз

Общее число успехов *n*-ого прыгуна

$$Rn = \Sigma x_{ni}$$

При использовании этой статистики для сравнения прыгунов необходимо, чтобы все они пытались преодолеть один и тот же набор высот.

Однако с помощью этой статистики нельзя получить прогноз на будущее.

Для прогнозирования необходимо знать вероятность того, что в следующий раз *n*-ый прыгун возьмет *i*-ую высоту.

Число успешных исходов – достаточная статистика

Число успешных исходов *Rn* является конкретной и вместе с тем ограниченной информацией.

Вероятность является абстрактной и вместе с тем принципиально необходимой информацией для прогноза. Это очень важный аспект, потому что прогноз – это одна из важнейших задач науки.

В исходной матрице могут быть пропуски, однако в матрице ожиданий пропусков нет – для всех *ni*-ых комбинаций вычисляется вероятность успешной попытки.

Исходы попыток преодоления *i*-ой высоты двумя прыгунами

Возможные исходы взятия высоты у обоих прыгунов		*n*-ый прыгун: Высота взята $x_{ni} = 1$	*n*-ый прыгун: Высота не взята $x_{ni} = 0$
m-ый прыгун	Высота взята $x_{mi} = 1$	$P_{mi}\, P_{ni}$	$P_{mi}\, (1-P_{ni})$
	Высота не взята $x_{mi} = 0$	$(1-P_{mi})\, P_{ni}$	$(1-P_{mi})\, (1-P_{ni})$

Обозначения числа успешных прыжков

N_{11}-число успешных прыжков у обоих прыгунов

N_{10}-число прыжков успешных у m-ого прыгуна и неуспешных у n-ого прыгуна

N_{01}-число прыжков успешных у n-ого прыгуна и неуспешных у m-ого прыгуна

N_{00}-число неуспешных прыжков у обоих прыгунов

Информативность исходов попыток преодоления i-ой высоты

Числа N_{11} и N_{00} бесполезны для целей сравнения. Информативными являются только исходы, когда один из прыгунов не берет высоту, а другой прыгун берет, т.е. информативны для целей сравнения только числа N_{10} и N_{01}.

Обозначим через P_{ni} вероятность того, что n-ый прыгун возьмет i-ую высоту, тогда $(1-P_{ni})$ – вероятность того, что этот прыгун не возьмет эту высоту. Аналогичные обозначения – для m-ого прыгуна.

Разность или отношение?

	Статистика	Ситуация			
		A	B	C	D
Число «побед» *m*-ого прыгуна	N_{10}	9	90	9000	5004
Число «побед» *n*-ого прыгуна	N_{01}	1	10	1000	4996
Разность	N_{10} - N_{01}	8	80	8000	8
Отношение	N_{10} / N_{01}	9	9	9	≈1

Статистики «отношение» и «разность»

N_{10} – это число прыжков, в которых «победа» на стороне *m*-ого прыгуна;

N_{01} – это число прыжков, в которых «победа» на стороне *n*-ого прыгуна.

Сравнение этих двух прыгунов по уровню их подготовленности отражает статистика (N_{10} / N_{01}), а не статистика (N_{10} - N_{01}).

Сравнение *m*-ого и *n*-ого прыгунов по исходам взятия *i*-ой высоты

$$\frac{N_{10}}{N_{01}} \approx \frac{P_{mi}(1-P_{ni})}{P_{ni}(1-P_{mi})}$$

Сравнение *m*-ого и *n*-ого прыгунов по исходам взятия любых высот

Естественно предположить, что соотношение в уровне подготовленности прыгунов не должно зависеть от «штурмуемой» высоты.

Математически это можно записать так, что для всех i и j

$$\frac{P_{mi}(1-P_{ni})}{P_{ni}(1-P_{mi})} \equiv \frac{P_{mj}(1-P_{nj})}{P_{nj}(1-P_{mj})}$$

Вероятностная модель для *n*-ого прыгуна

Из предыдущего выражения следует, что

$$\left(\frac{P_{ni}}{(1-P_{ni})}\right) \equiv \left(\frac{P_{nj}}{(1-P_{nj})}\right)\left(\frac{(1-P_{mj})}{P_{mj}}\right)\left(\frac{P_{mi}}{(1-P_{mi})}\right)$$

Обобщение вероятностной модели для *n*-ого прыгуна

Для обеспечения объективности необходимо, чтобы соотношение между любой парой высот i и j должно быть справедливо для любого прыгуна m.

Любой прыгун и любая высота могут быть выбраны в качестве точки отсчета для проведения этих сравнений.

Удобно выбрать прыгуна 0 и высоту 0 эквивалентными, т.е. P_{00}=0,5.

Вероятностная модель для *n*-ого прыгуна

Выбрав прыгуна 0 и высоту 0 как эквивалентные получаем P_{00} = 0,5. В результате:

$$\left(\frac{P_{ni}}{(1-P_{ni})}\right) \equiv \left(\frac{P_{n0}}{(1-P_{n0})}\right)\left(\frac{P_{0i}}{(1-P_{ni})}\right)\left(\frac{(1-P_{00})}{P_{00}}\right) = \left(\frac{P_{n0}}{(1-P_{no})}\right)\left(\frac{P_{0i}}{(1-P_{0i})}\right)$$

Откуда

$$\left(\frac{P_{ni}}{(1-P_{ni})}\right) \equiv f(n)\times g(i) = \frac{b_n}{d_i}$$

где $f(n) = b_n$ (уровень подготовленности *n*-ого прыгуна);
$g(i) = 1/d_i$ (уровень трудности высоты).

Условие объективности измерений

Необходимо подчеркнуть, что для объективности измерений отношение шансов для *n*-ого прыгуна преодолеть *i*-ую высоту должно быть произведением уровня подготовленности прыгуна, выраженного как $f(n) = b_n$ и уровня трудности высоты, выраженного как $g(i) = 1/d_i$. Ничего другого здесь не требуется.

Оценка параметров модели

Отметим, что
$$b_n = \frac{P_{n0}}{1 - P_{n0}}$$

является исключительно свойством прыгуна *n* в выбранной системе отсчета.

Точно так же
$$\frac{1}{d_i} = \frac{P_{0i}}{(1 - P_{0i})}$$

является исключительно свойством *i*-ой высоты в той же самой системе отсчета.

Параметры прыгуна и высоты полностью разделены

В модели измерения параметры прыгуна и высоты полностью разделены

Это позволяет оценивать:

- уровень подготовленности прыгуна независимо от уровня высоты;

- уровень высоты независимо от уровня подготовленности прыгуна.

Диапазон варьирования найденных показателей

Подчеркнем, что

b_n – это отношение вероятностей (odds), которое варьируется от нуля до бесконечности и зависит только от прыгуна n и выбранной системы отсчета;

d_i также варьируется от нуля до бесконечности и зависит только от i-ой высоты и той же самой выбранной системы отсчета.

Дихотомическая модель Раша

Таким образом, определен способ выявления сильнейшего прыгуна.

Следующий, важный для практики вопрос – насколько сильнее? Однако «насколько» это уже не отношение – это разность.

Прологарифмировав обе части полученного выше уравнения получаем

$$\ln\left(\frac{P_{ni}}{(1-P_{ni})}\right) \equiv \ln\left(\frac{P_{n0}}{(1-P_{n0})}\right) \times \ln\left(\frac{P_{0i}}{(1-P_{0i})}\right) \equiv \ln(b_n) - \ln(d_i)$$

Дихотомическая модель Раша

Удобно ввести следующие обозначения

$$\ln\left(\frac{P_{ni}}{(1-P_{ni})}\right) \equiv B_n - D_i$$

Откуда следует, что

$$P_{ni} = \frac{\exp\left(B_n - D_i\right)}{\left[1+\exp\left(B_n - D_i\right)\right]}$$

где $B_n = \ln\left(\frac{P_{n0}}{1-P_{n0}}\right) = \ln\left(b_n\right)$ $\quad D_i = \ln\left(\frac{P_{0i}}{1-P_{oi}}\right) = \ln\left(d_i\right)$

Дихотомическая модель является базовой в семействе моделей Раша

Модель Раша, используемая для представления результатов тестирования, выводится на основе аналогии с прыгунами, преодолевающими *i*-ую высоту. Параметры B_n и D_i рассматриваются как уровень подготовленности испытуемого и трудность задания соответственно.

Все остальные виды моделей Раша являются производными от этой дихотомической модели.

Благодарю за внимание!

Маслак Анатолий Андреевич,
дтн, проф., проректор по научной работе,
e-mail: anatoliy_maslak@mail.ru

Славянский-на-Кубани государственный педагогический институт
www.sgpi.ru