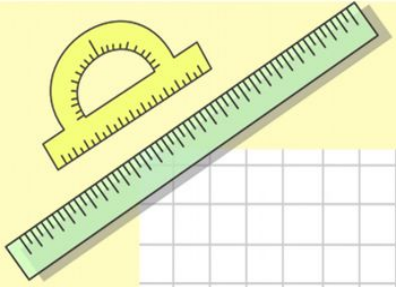
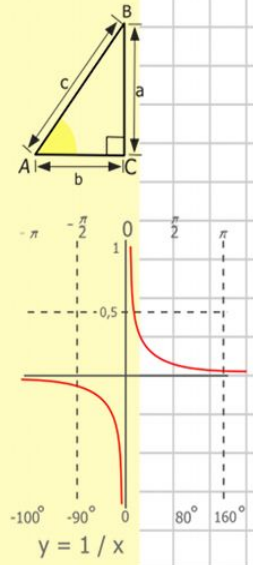
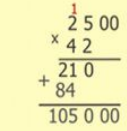
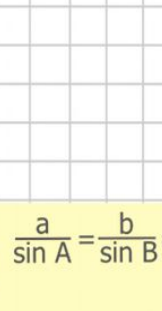
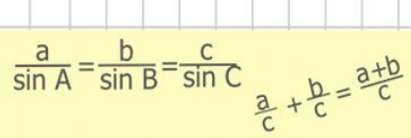
Математика

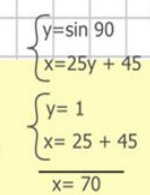
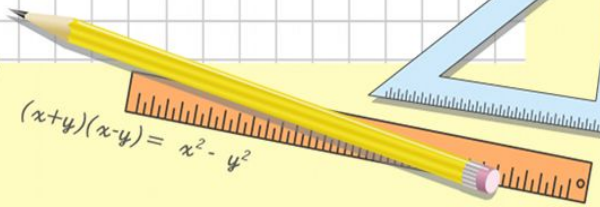
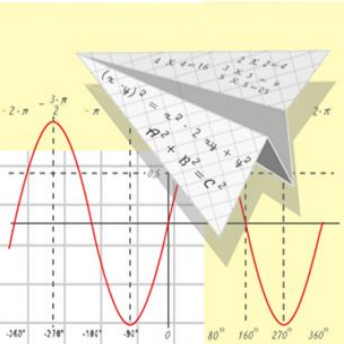
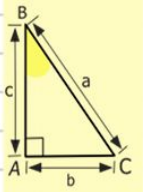
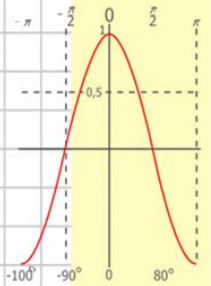
Занятие 110.
Определенный интеграл

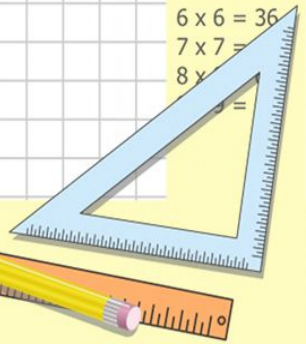
1. Криволинейная трапеция
2. Определенный интеграл
3. Формула Ньютона-Лейбница



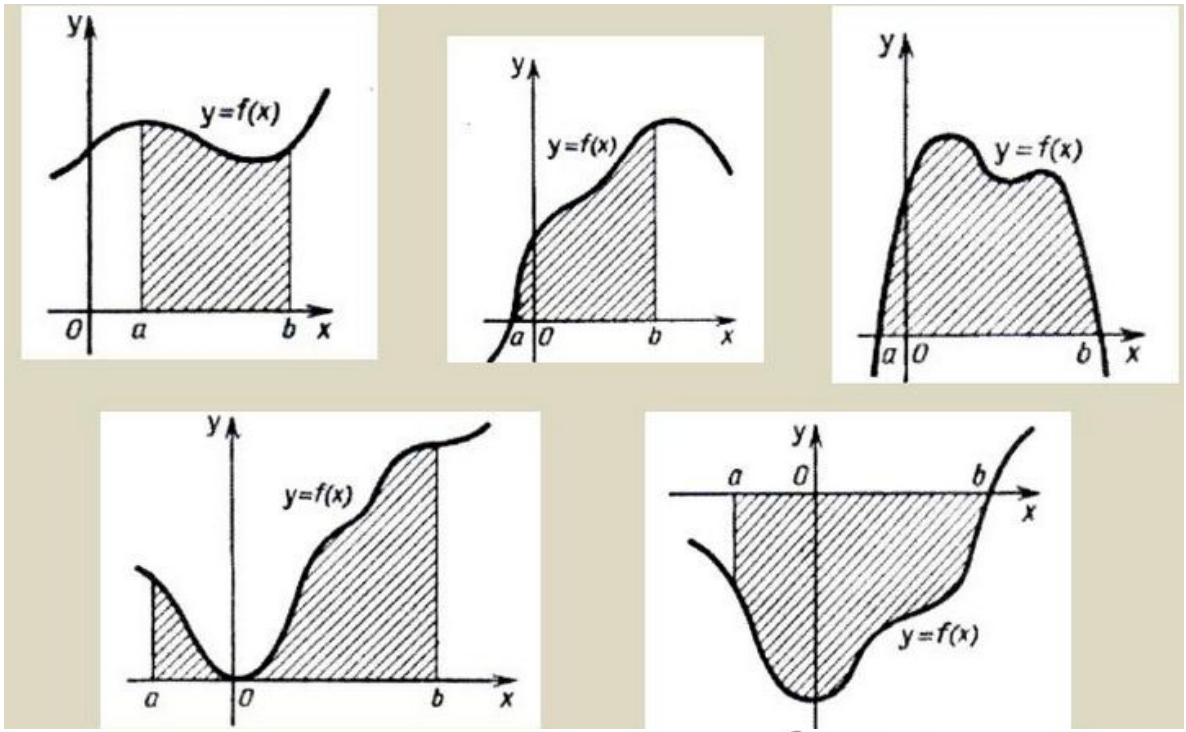





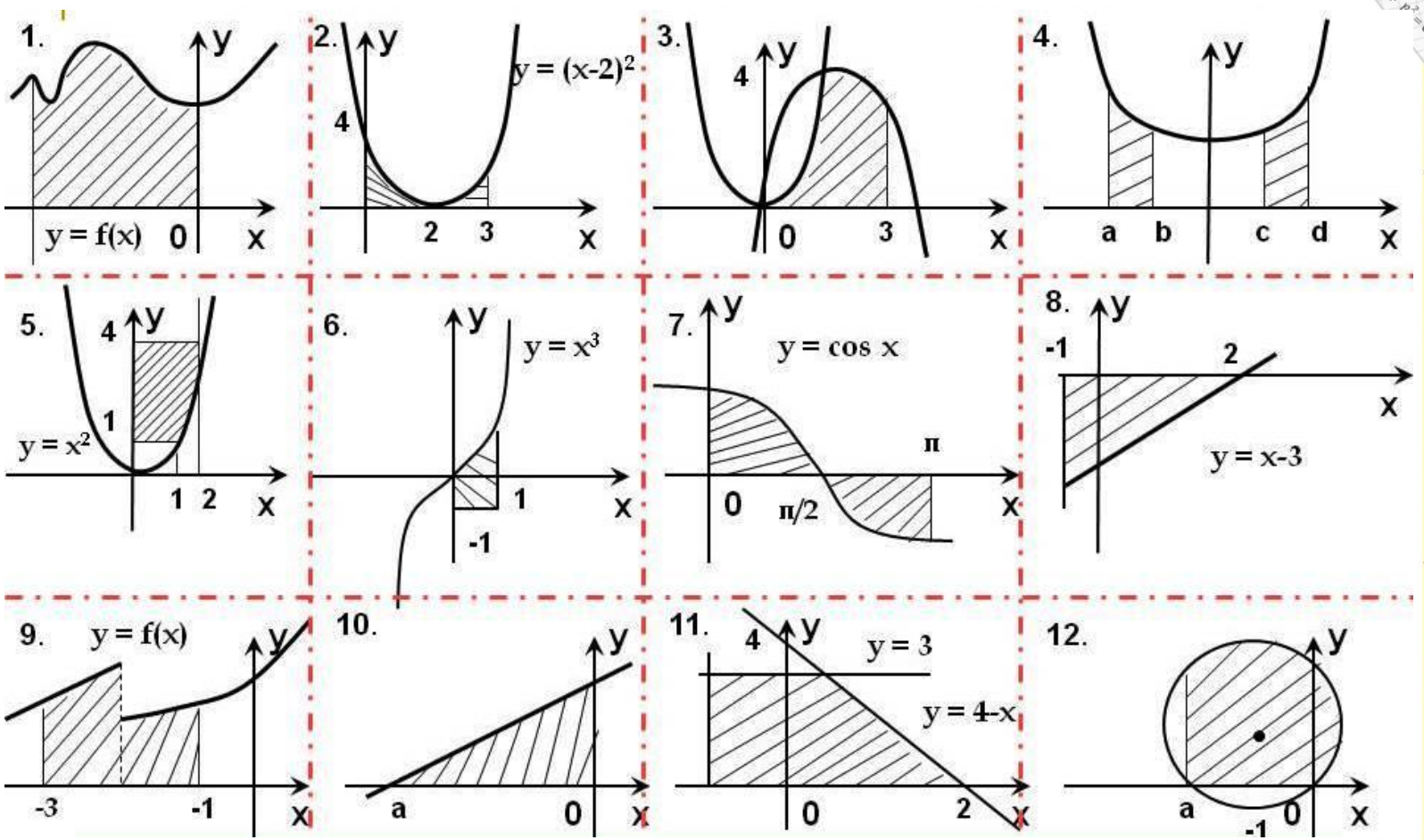
Криволинейная трапеция

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная осью ОХ, вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$, а также графиком функции $y=f(x)$, которая на отрезке $[a; b]$ непрерывна и сохраняет постоянный знак.



Криволинейная трапеция

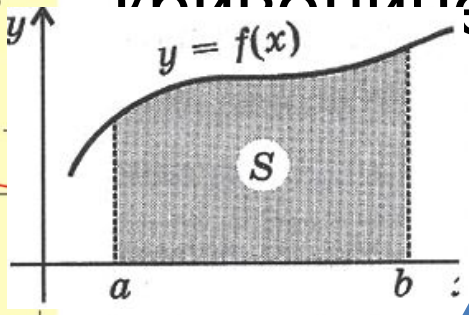
На каких рисунках изображены криволинейные трапеции?



Ответ: 1,2,8,10

Определенный интеграл

Определенным интегралом функции $y=f(x)$ в пределах от a до в называют площадь соответствующей криволинейной трапеции



$$\int_a^b f(x)\,dx = S(кр.трап.)$$

пределы интегрирования

знак интеграла

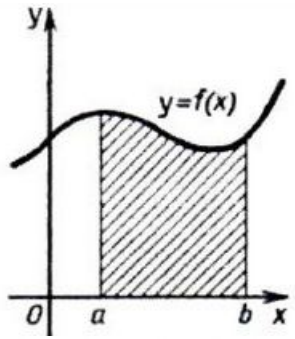
формула функции

дифференциал функции

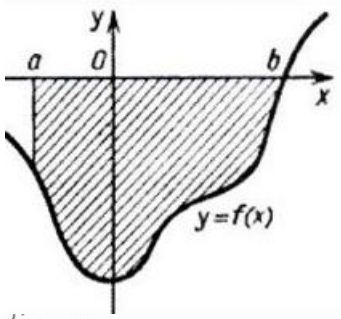
Криволинейная трапеция

Решая вопрос о площади криволинейной трапеции, пришли к выводу, что она будет равна приращению первообразной $F(x)$ от функции $f(x)$, которая ограничивает эту трапецию сверху.

$$S = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$



S>0



S<0

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_1^2 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5} = \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5} = 6{,}2$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_4^9 \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_4^9 = \frac{2}{3}\sqrt{9^3} - \frac{2}{3}\sqrt{4^3} = \frac{2}{3} * (27 - 8) = \frac{38}{3}$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^2 (6x^2 + 4x - 5)dx = 6 * \frac{x^3}{3} + 4 * \frac{x^2}{2} - 5x\Big|_0^2 = 2x^3 + 2x^2 - 5x\Big|_0^2 =$$

$$= (2 * 2^3 + 2 * 2^2 - 5 * 2) - (2 * 0^3 + 2 * 0^2 - 5 * 0) =$$

$$= 16 + 8 - 10 - 0 = 14$$

$$\int_0^1 \sqrt[5]{x^2}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{2}{5}}dx = \frac{x^{\frac{7}{5}}}{7/5}\Big|_0^1 = \frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7}\Big|_0^1 = \frac{5}{7} * \sqrt[5]{1^7} - \frac{5}{7} * \sqrt[5]{0^7} = \frac{5}{7}$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_1^4 \frac{dx}{5x-2} = \left| \begin{array}{l} kx+b = 5x-2,\ k=5 \\ f(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow F(t) = \ln|t| \end{array} \right| = \frac{1}{5}\ln|5x-2|\Big|_1^4 =$$

$$= \frac{1}{5}\ln|5*4-2| - \frac{1}{5}\ln|5*1-2| = \frac{1}{5}(\ln 18 - \ln 3) = \frac{1}{5}\ln\frac{18}{3} = \frac{1}{5}\ln 6$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2x+3)^3} = \left| \begin{array}{l} kx+b = 2x+3,\ k=2 \\ f(t) = \frac{1}{t^3} = t^{-3} \Rightarrow F(t) = \frac{t^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} * \left(-\frac{1}{2(2x+3)^2} \right)\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{4(2x+3)^2}\Big|_{-1}^{1} = -0{,}01 - (-0{,}25) = 0{,}24$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^{\pi/12} \cos 4x dx = \left| \begin{array}{l} kx + b = 4x,\ k = 4 \\ f(t) = \cos t \Rightarrow F(t) = \sin t \end{array} \right| = \frac{1}{4} * \sin 4x \Big|_0^{\pi/12} =$$

$$= \frac{1}{4} * \sin\left(4 * \frac{\pi}{12}\right) - \frac{1}{4} * \sin(4 * 0) = \frac{1}{4} * \sin\frac{\pi}{3} - 0 = \frac{1}{4} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\int_0^1 e^{3x-1} dx = \left| \begin{array}{l} kx + b = 3x - 1,\ k = 3 \\ f(t) = e^t \Rightarrow F(t) = e^t \end{array} \right| = \frac{1}{3} * e^{3x-1} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} * e^2 - \frac{1}{3} * e^{-1} =$$

$$= \frac{e^2}{3} - \frac{1}{3e} = \frac{e^3 - 1}{3e}$$