ТЕМА: Интегралы функции одной переменной

ВОПРОС 1. Неопределенный интеграл

ВОПРОС 2. Определенный интеграл

ВОПРОС 3. Приложения определенных интегралов

1.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на множестве X, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Определение. Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Т.е.

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Таблица интегралов

1. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$.

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$,

3. $\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C$,

4. $\int \mathrm{e}^{u}\, du = \mathrm{e}^{u} + C$,

5. $\int \sin u du = -\cos u + C$,

6. $\int \cos u du = \sin u + C$,

7. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$,

1. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C,$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C,$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

Метод замены переменной

Метод замены переменной состоит в том, что в интеграл $\int f(x)dx$, нахождение которого затруднительно, вводят новую переменную t, связанную с переменной x соотношением

$$x = \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ – непрерывная монотонная функция, имеющая непрерывную производную $\varphi'(t)$ на некотором интервале изменения t.

Таким образом,

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

После того, как интеграл найден, возвращаются к первоначальной переменной с помощью подстановки $t = \varphi^{-1}(x)$.

Пример:

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \left\langle t = \ln x,\, dt = \frac{dx}{x} \right\rangle = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

Метод интегрирования по частям

Интегрирования по частям основано на применении формулы

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Случаи применения формулы по частям.

I. $\int \underbrace{P_n(x)}_{u} \cdot \underbrace{e^{kx} dx}_{dv}$; $\int \underbrace{P_n(x)}_{u} \cdot \underbrace{a^{kx} dx}_{dv}$;

$\int \underbrace{P_n(x)}_{u} \cdot \underbrace{\cos kx dx}_{dv}$; $\int \underbrace{P_n(x)}_{u} \cdot \underbrace{\sin kx dx}_{dv}$.

II. $\int P_n(x)\cdot \arcsin mx dx$; $\int P_n(x)\cdot \arccos mx dx$;

$\int P_n(x)\cdot \mathrm{arctg}\, mx dx$;

$\int P_n(x)\cdot \mathrm{arcctg}\, mx dx$;

$\int P_n(x)\cdot \ln mx dx$.

За $dv = P_n(x)dx$,

$u = \arcsin mx$,

$u = \arccos mx$,

$u = \mathrm{arctg}\, mx$,

$u = \mathrm{arcctg}\, mx$,

$u = \ln mx$.

2. Определенный интеграл

Если $f(x) > 0$ на $[a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь <u>криволинейной трапеции</u> – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x), x = a, x = b, y = 0$ (рис. 1).

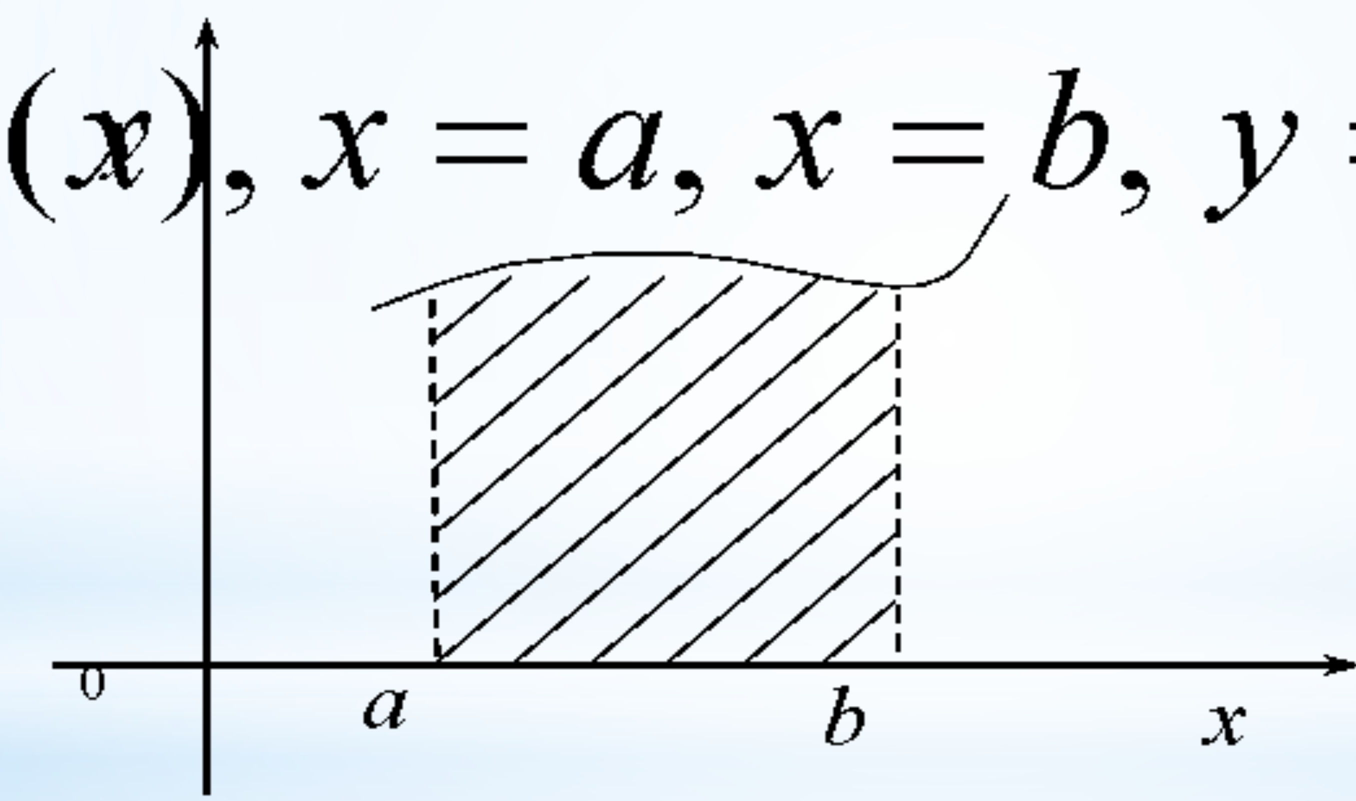

Рис. 1

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

Интегрирование по частям:

$$\int_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

где $u = u(x), v = v(x)$ – дифференцируемые функции на $[a;b]$.

Замена переменной:

$$\int_a^b f(x)dx = \left\langle \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right\rangle = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(t)$ – функция непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \le t \le \beta$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $f[\varphi(t)]$ – функция непрерывная на $[\alpha;\beta]$.

Если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Если $f(x)$ – четная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$.

3. Приложения определенных интегралов

1) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ $\left(f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a;b]\right)$, прямыми $x = a,\ x = b$ и осью OX вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

2) Площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций

$y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$: $f_1(x) \le f_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$ и

прямыми

$x = a, \quad x = b$ вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$$

(рис.2)

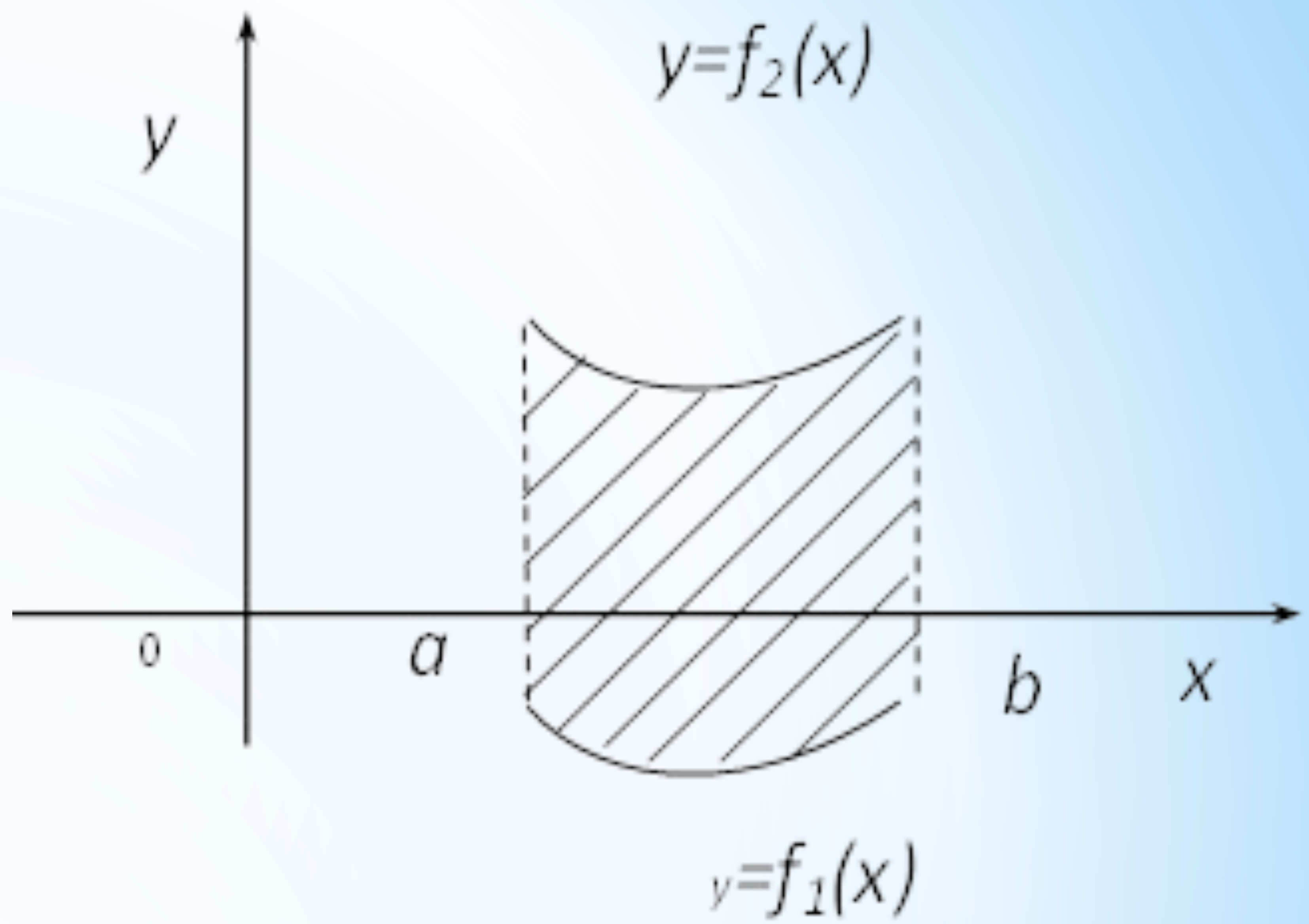

Рис 2

4) Если тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, то его объем

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$$

5) При вращении вокруг оси OY криволинейной трапеции, образуется тело вращения, объем которого

$$V=\pi\int_c^d g^2(y)dy$$

6) Если плоская кривая (l) задана уравнением $y = y(x)$, то длина ее дуги от точки $A(a, y(a))$ до точки $B(b, y(b))$ вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$

Если (l) задана параметрически:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где $t \in [\alpha; \beta]$, то длина ее дуги вычисляется по формуле:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$$

7) Работа переменной силы $F = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная функция на $[a;b]$, действующей в направлении оси OX на отрезке $[a;b]$ вычисляется по формуле:

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x)dx$$

8) Если материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v = v(t)$, то пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2 путь

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$