Определённый интеграл

Автор презентации
Преподаватель ГБПОУ ПК №4 СПб
Мартусевич Татьяна Олеговна

Определённый интеграл

- *Определённый интеграл* функции *y=f(x)* есть *число*, значение которого зависит от вида этой функции и пределов интегрирования *a* и *b*:

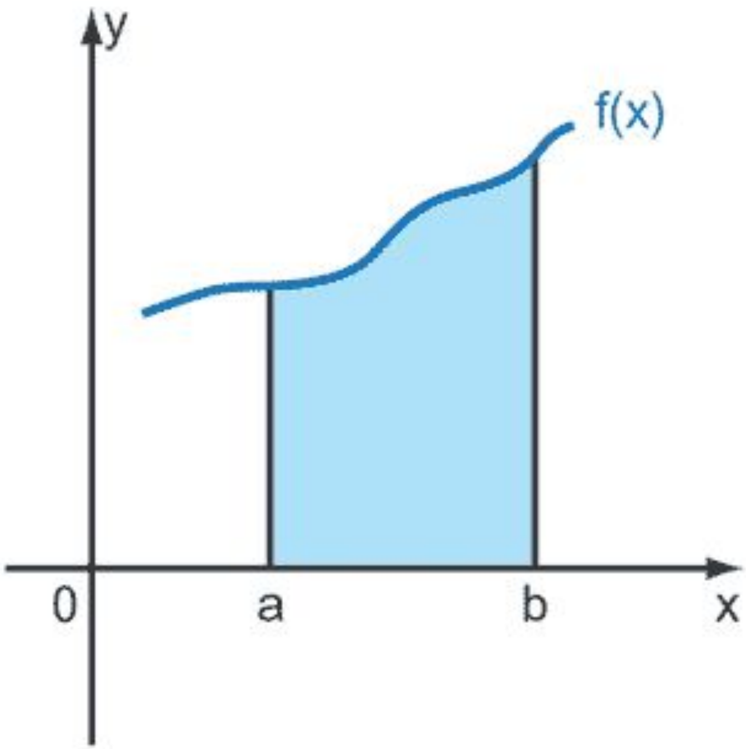
$$\int_a^b f(x)dx$$

Определённый интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- *f(x) – подынтегральная функция,*
- *f(x)dx – подынтегральное выражение,*
- *a – нижний предел интегрирования*
- *b – верхний предел интегрирования*

Площадь криволинейной трапеции



Фигура, ограниченная осью OX, графиком функции y=f(x), и прямыми x=a и x=b называется криволинейной трапецией.
Площадь этой фигуры называется определённым интегралом эф от икс де икс.

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Главные формулы

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$

   $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$n \neq -1$$

Вычислить: $$\int_1^3 x^3 dx.$$

$$\int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^3 = \left(\frac{3^4}{4}\right) - \left(\frac{1^4}{4}\right) =$$

$$= \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20.$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$

$$S = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\right) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ (кв.ед.).}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

① $$\int_1^2 2x^2\,dx = 2\int_1^2 x^2\,dx = 2\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}\Bigg|_1^2 = \underbrace{2\cdot\frac{x^3}{3}}_{F(x)\ \text{первообразная}}\Bigg|_{1\ (a)}^{2\ (в)} = \underbrace{\frac{2\cdot 2^3}{3}}_{F(в)} - \underbrace{\frac{2\cdot 1^3}{3}}_{F(a)} =$$

$$= \frac{2\cdot 8}{3} - \frac{2\cdot 1}{3} = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

② $$\int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \left(\frac{3x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{2+1}}{2+1}\right)\Bigg|_0^3 = \underbrace{\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)}_{F(x)}\Bigg|_{0\,\to\,a}^{3\,-\,в} = \quad F(в) - F(a)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{3\cdot 3^2}{2} - \frac{3^3}{3}\right)}_{F(в)} - \underbrace{\left(\frac{3\cdot 0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right)}_{F(a)} = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - 0 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} =$$

$$= 13\frac{1}{2} - 9 = 4\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

(3)

$$\int_{-2}^{1}(x^2+2)\,dx = \left(\frac{x^{2+1}}{2+1} + 2\cdot x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1^3}{3} + 2\cdot 1\right)}_{F(b)} - \underbrace{\left(\frac{(-2)^3}{3} + 2\cdot(-2)\right)}_{F(a)} = \frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 4\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3} + 4 = \frac{9}{3} + 6 = 3 + 6 = 9.$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

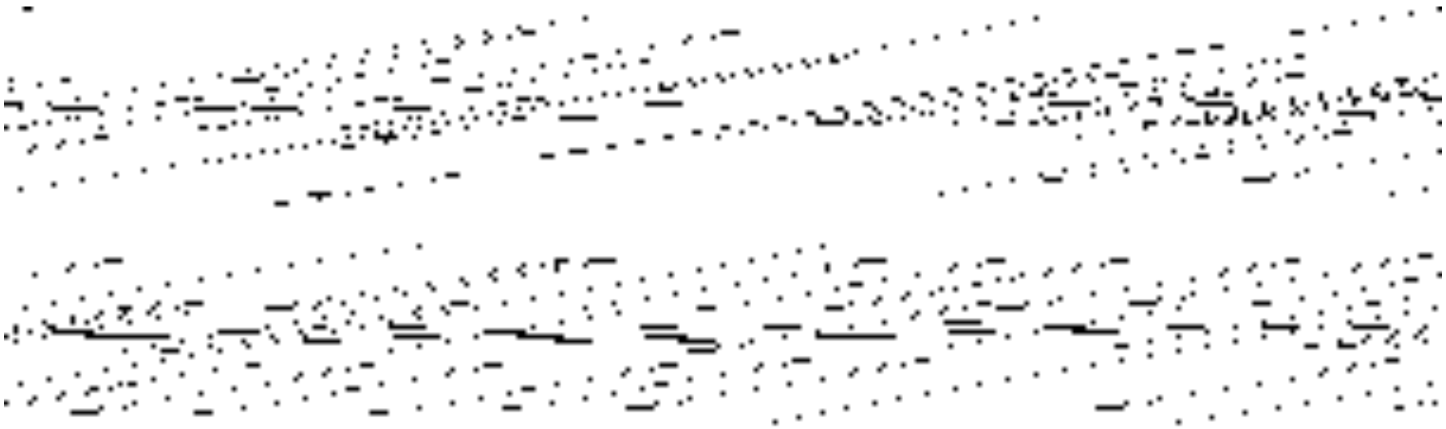
$$n \neq -1$$

$$\int_0^3 (3x - x^2)\,dx =$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$n \neq -1$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$n \neq -1$$

Пример 1. Вычислить определённый интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 2.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$n \neq -1$$

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x}\right) dx =$$

$$= 4\int_1^2 \frac{dx}{x} - 5\int_1^2 x^4\,dx + 2\int_1^2 \sqrt{x}\;dx =$$

$$= 4\ln|x|\Big|_1^2 - 5\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 + 2\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_1^2 =$$

$$= 4(\ln 2 - \ln 1) - \left(2^5 - 1^5\right) + \frac{4}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\sqrt{1}\right) =$$

$$= 4\ln 2 + \frac{8}{3}\sqrt{2} - 32\frac{1}{3}.$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$n \neq -1$$

Вы – молодцы!
Спасибо за работу!!!

Домашнее задание: №1004, 1006 (чётные), обязательно сверьтесь с ответами в учебнике. Удачи!

Вычислить интеграл (1004—1011).

1004 1) $\int_0^1 x\,dx$; 2) $\int_0^3 x^2\,dx$; 3) $\int_{-1}^2 3x^2\,dx$; 4) $\int_{-2}^3 2x\,dx$;

5) $\int_2^3 \frac{1}{x^2}\,dx$; 6) $\int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx$; 7) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$; 8) $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

1005 1) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$; 2) $\int_0^{\ln 2} e^x\,dx$; 3) $\int_{-\pi}^{2\pi} \cos x\,dx$;

4) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin x\,dx$; 5) $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx$; 6) $\int_{-3\pi}^{0} \cos 3x\,dx$.

1006 1) $\int_{-3}^2 (2x-3)\,dx$; 2) $\int_{-2}^{-1} (5-4x)\,dx$; 3) $\int_{-1}^2 (1-3x^2)\,dx$;

4) $\int_{-1}^1 (x^2+1)\,dx$; 5) $\int_0^2 (3x^2-4x+5)\,dx$.